Eigenwertproblem

In diesem Basistext soll ein einfaches „Kochrezept“ zur Lösung des Eigenwertproblems aufgezeigt werden.

Gegeben ist eine n x n-Matrix A.

Gesucht ist ein λ, für das es einen nichttrivialen Vektor b gibt, mit: $Ab = \lambda b$

Eigenwertberechnung

Lösung anhand eines Beispiels (1):

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

Man berechnet die Determinante von A, wobei auf der Hauptdiagonale λ jeweils subtrahiert wird:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda) - (-5) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$$

Die Eigenwerte sind 1 und -3.

weiteres Beispiel (2):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4)]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

Die Eigenwerte sind 1, 3 und -2.

Eigenvektorberechnung

Man löst die Gleichung $(A - \lambda E)x = 0$.

Dazu subtrahiert man bei der Matrix A wieder λ auf der Hauptdiagonalen und man sieht die Matrix als Gleichungssystem an (rechte Seite 0), das man mit dem Gauss-Verfahren lösen kann.

Zu Beispiel (1):

$\underline{\lambda = 1}$

(2-1) -5 | 0

1 (-4-1) | 0

1 -5 | 0

1 -5 | 0

1 -5 | 0

0 0 | 0 => $x_2 = 1 \quad x_1 = 5$

Die Eigenvektoren sind $\binom{1}{5}$ und alle Vielfachen davon.

$\underline{\lambda = -3}$

(2-(-3)) -5 | 0

1 (-4-(-3)) | 0

5 -5 | 0

1 -1 | 0

1 -1 | 0

0 0 | 0 => $x_2 = 1 \quad x_1 = 1$

Die Eigenvektoren sind $\binom{1}{1}$ und alle Vielfachen davon

Zu Beispiel (2):

$\underline{\lambda = 1}$

1 -4 1 | 0

-1 -2 1 | 0

0 0 0 | 0

1 -4 1 | 0

2 -2 0 | 0

0 0 0 | 0 => $x_2 = 1 \quad x_1 = 1 \quad x_3 = 3$

Die Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen.

$\underline{\lambda = 3}$

-1 -4 1 | 0

-1 -4 1 | 0

0 0 -2 | 0

-1 -4 1 | 0

0 0 0 | 0

0 0 1 | 0 => $x_3 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_1 = -4$

Die Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen davon.

$\underline{\lambda = -2}$

4 -4 1 | 0

-1 1 1 | 0

0 0 3 | 0

4 -4 1 | 0

-1 1 0 | 0

0 0 1 | 0

1 -1 0 | 0

0 0 0 | 0

0 0 1 | 0 => $x_3 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_1 = 1$

Die Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und alle Vielfachen davon.