

# Partialbruchzerlegung

In diesem Basistext wird die Partialbruchzerlegung erklärt. Dazu werden zunächst die einzelnen Schritte theoretisch dargestellt. Im Anschluss gibt es praktische Beispiele.

## Theorie

### Schritt 1: Polynomdivision

Wir gehen von einer gebrochenrationalen Funktion aus mit  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ .

Ist der Grad des Nenners größer als der Grad des Zählers kann man diesen Schritt überspringen.

Ist der Grad des Zählers gleich groß oder größer als der des Nenners, führt man zunächst eine Polynomdivision durch. Mit dem Rest der Polynomdivision wird weitergemacht.

### Schritt 2: Nullstellenberechnung des Nenners

Man berechnet die Nullstellen des Nenners.

Hat der Nenner den Grad 2, wendet man die pq-Formel an.

Hat der Nenner einen höheren Grad ermittelt man die Nullstellen durch „raten“. Dabei überprüft man die Teiler des letzten Summanden des Nennerpolynoms.

Beispiel:  $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Mögliche Nullstellen (Teiler von 6) sind: 1, 2, 3, 6 und natürlich -1, -2, -3, -6.

Man fängt mit den kleinsten an und man erhält durch einsetzen sofort 1 als Nullstelle. Es gilt

$$\text{also: } Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

### Schritt 3: Partialbrüche aufstellen

Beim Aufstellen der Partialbrüche werden für die noch unbekanntenen Größen die Großbuchstaben A, B, C usw. benutzt.

Jede Nullstelle des Nenners erhält einen eigenen Bruch, wobei der Zähler durch eine Unbekannte repräsentiert wird.

Beispiel: Wenn die Nullstelle des Nenners 1 ist, dann ist der zugehörige Bruch  $\frac{A}{x-1}$ .

Kommt eine Nullstelle doppelt vor, so erhält sowohl die einfache Nullstelle als auch das Quadrat einen eigenen Bruch.

Beispiel Wenn 1 eine doppelte Nullstelle ist, ergeben sich die Brüche  $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$

Hat bei der Bestimmung der Nullstellen ein quadratischer Ausdruck keine reellen Nullstellen, so lässt man ihn als Ganzes im Nenner und der Zähler erhält ein allgemeines lineares Polynom.

Beispiel:  $x^2 + 2x + 5$  besitzt keine reelle Lösung. Der zugehörige Bruch ist:  $\frac{Ax+B}{x^2+2x+5}$

Schritt 4: Zusammenfassen der Partialbrüche

Die Partialbrüche werden wie in der Bruchrechnung üblich gleichnamig gemacht und dann addiert. Der Nenner des Ergebnisses ist selbstverständlich der gleich wie bei  $f(x)$ .

Schritt 5: Aufstellen eines Gleichungssystems

Man vergleicht die Koeffizienten und erhält so mehrere Gleichungen, die zu einem Gleichungssystem zusammengefasst werden.

Schritt 6: Lösen des Gleichungssystems und Einsetzen in die Partialbrüche

Das Gleichungssystem wird mit dem Gauss-Verfahren gelöst und die erhaltenen Werte für A, B, C usw. werden in die Brüche eingesetzt.

## Praxis

### Beispiel 1:

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

Da der Grad des Nenners größer als der des Zählers ist, ist keine Polynomdivision nötig.

Mögliche Nullstellen des Nenners sind: 1, -1, 2, -2, 4 und -4. Durch „Ansehen“ erkennt man leicht, dass die Nullstelle des Nenners negativ sein muss, da sich sonst nie 0 ergeben kann. Durch Einsetzen von -1 ermittelt man die erste Nullstelle.

$$\text{Man erhält: } x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x + 1)(x^2 + 2x + 4)$$

Der Faktor  $x^2 + 2x + 4$  wird durch Polynomdivision ermittelt. Mit etwas Übung kann man das aber auch im Kopf schaffen.

$x^2 + 2x + 4$  wird nun mit der pq-Formel gelöst. Man erhält aber keine reelle Lösung. Die Partialbrüche sind also:

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}$$

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4} &= \frac{A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (2A + B + C)x + (4A + C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit  $f(x)$  erhält man ein Gleichungssystem, das man löst:

$$A + B = 5$$

$$2A + B + C = 8$$

$$4A + C = 9$$

$$\text{Man erhält: } A=2 \quad B=3 \quad C=1$$

Durch Einsetzen komplettiert man die Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4}$$

Beispiel 2:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 1}$$

Der Grad des Nenners ist größer als der des Zählers. Eine Polynomdivision ist nicht nötig.

Mögliche Nullstellen des Nenners sind 1 und -1.

Durch Einsetzen von -1 erhält man die erste Nullstelle:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = (x + 1)(2x^2 + x - 1)$$

Durch weiteres Einsetzen von -1 erhält man noch eine Nullstelle:

$$(x + 1)(2x^2 + x - 1) = (x + 1)^2(2x - 1)$$

Die Partialbrüche sind somit:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{2x - 1}$$

Wir fassen zusammen:

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{2x - 1} = \frac{A(x + 1)(2x - 1) + B(2x - 1) + C(x + 1)^2}{2x^3 + 3x^2 - 1}$$

$$\frac{(2A + C)x^2 + (A + 2B + 2C)x + (-A - B + C)}{2x^3 + 3x^2 - 1}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$2A + C = 4$$

$$A + 2B + 2C = -5$$

$$-A - B + C = -3$$

Wenn man dieses Gleichungssystem löst erhält man:     A=3   B=-2   C=-2

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{3}{x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} - \frac{2}{2x - 1}$$