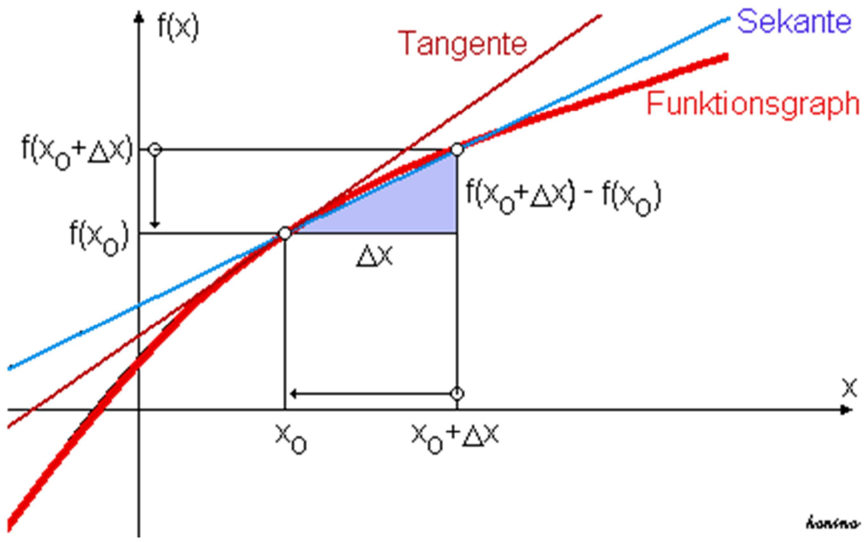
Basistext – Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion beschreibt ihre Steigung. Für einen Punkt der Funktion entspricht die Ableitung der Steigung der Tangente, die man an diesem Punkt anlegen kann. Folgende Grafik soll den Sachverhalt veranschaulichen:



Autor:Honina

Gesucht ist die Steigung der Tangente (rot) im Punkt x_0. Dazu wählt man einen Punkt ($x_0 + \Delta x$). Die Steigung der durch diese Punkte gebildeten Sekante (blau) erhält man durch den Ausdruck:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

Lässt man nun Δx immer kleiner werden nähert sich die Sekantensteigung immer mehr der Tangentensteigung an. Für die Tangentensteigung gilt also:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

Man spricht dann von der ersten Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Eine Funktion heißt differenzierbar an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient oder auch Ableitung von f nach x an der Stelle x_0.

Für die Differenzierbarkeit von Funktionen gelten folgende Regeln:

- Jedes Polynom ist differenzierbar
- Summen, Produkte und Quotienten von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar
- Verkettungen von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar

Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen:

$f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle x = 0

$f(x) = |x|$ an der Stelle x = 0

Ableitungsregeln

1) Konstante
   $f(x) = c$
   $f'(x) = 0$

2) Potenzregel
   $f(x) = x^n$
   $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

   Beispiel:
   $f(x) = x^5$
   $f'(x) = 5x^4$

3) Faktorregel

$$\big(a * f(x)\big)' = a \cdot f'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 3x^4$$
$$f'(x) = (3 \cdot 4)x^3 = 12x^3$$

4) Summenregel

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = x^4 + x^5$$
$$f'(x) = 4x^3 + 5x^4$$

5) Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = x^3 \cdot x^2$$
$$f'(x) = 3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$$

6) Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{x^3}$$
$$f'(x) = \frac{(6x+5) \cdot x^3 - (3x^2 + 5x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{6x^4 + 5x^3 - 9x^4 - 15x^3}{x^6}$$
$$= \frac{-3x^4 - 10x^3}{x^6} = -\frac{3}{x^2} - \frac{10}{x^3}$$

7) Kettenregel

$f(x) = f(g(x))$

$f'(x) = g'(x) \cdot f'(g)$ (innere mal äußere Ableitung)

Beispiel:

$f(x) = (x^3 - 2)^2$

$f'(x) = 3x^2 \cdot 2(x^3 - 2) = 6x^5 - 12x^2$

Besondere Ableitungen

f(x)	**f'(x)**	**f(x)**	**f'(x)**
C	0	sin(x)	cos(x)
ax^n	$a * nx^{n-1}$	cos(x)	-sin(x)
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	tan(x)	$\frac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2(x)$
e^x	e^x	arcsin(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	arccos(x)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
ln(x)	$\frac{1}{x}$	arctan(x)	$\frac{1}{1+x^2}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$		

Höhere Ableitungen

Höhere Ableitungen einer Funktion f(x) werden gebildet, indem man die Ableitung mehrfach hintereinander auf f(x) anwendet.

Beispiel:

$f(x) = 2x^5$

$f'(x) = 10x^4$ - erste Ableitung von f(x)

$f''(x) = 40x^3$ - zweite Ableitung von f(x)

$f'''(x) = 120x^2$ - dritte Ableitung von f(x)