Basistext – Vektoren

Ein Vektor ist eine mathematische oder physikalische Größe, der eine Richtung zugeordnet ist. Beispielsweise muss bei einer Kraft neben ihrer „Stärke“ auch die Richtung angegeben werden, in der sie wirkt.

Vektoren werden normalerweise durch einen Pfeil dargestellt. Dabei entspricht die Richtung des Pfeils der Richtung des Vektors und die Länge des Pfeils entspricht der eigentlichen Größe. Als mathematisches Symbol verwendet man ein Pfeil über einem Buchstaben z.B.:$\vec{a}$.

Im R^2 schreibt man: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Im R^3 ergibt sich: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Ein Vektor heißt Nullvektor, wenn er die Länge 0 hat. Ein Nullvektor besitzt keine Richtung.

Ein Vektor heißt Gegenvektor zu einem anderen, wenn beide die gleiche Länge haben, die Richtung jedoch entgegengesetzt ist.

Länge / Betrag

Der Betrag eines Vektors kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

bzw.

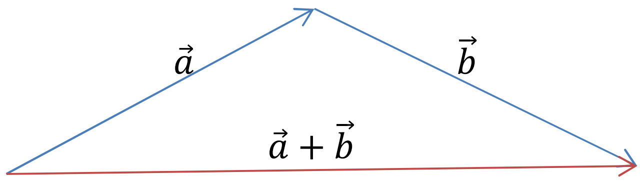
$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Addition

Die Addition von Vektoren erfolgt durch getrennte Addition der einzelnen „Richtungen“:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Anschaulich heißt das, dass der Ansatz von Vektor b durch Parallelverschiebung an die Spitze des Vektors a gelegt wird.



Es gilt bei der Addition von Vektoren das Kommutativgesetz:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

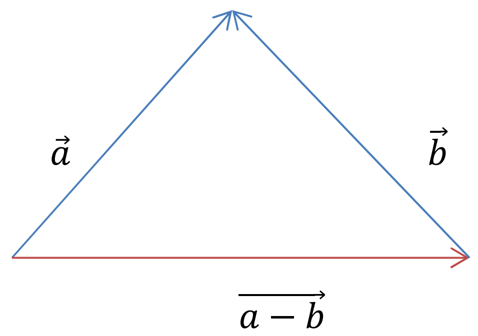
Es gilt bei der Addition von Vektoren das Assoziativgesetz:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Die Subtraktion von Vektoren erfolgt analog:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Anschaulich wird die Spitze des Vektors b durch Parallelverschiebung an die Spitze des Vektors a gelegt. Der Vektor a-b reicht dann vom Beginn des Vektors a zum Beginn des Vektors b:

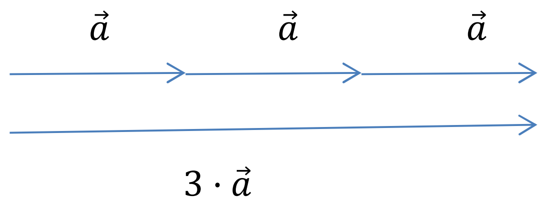


Multiplikation mit einem Skalar

Die Multiplikation mit einem Skalar (reelle Zahl) erfolgt durch Multiplikation der einzelnen Komponenten mit dem Skalar:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ 3a_2 \\ 3a_3 \end{pmatrix}$$

Anschaulich heißt das, dass sich die Länge des Vektors vervielfacht, die Richtung jedoch nicht ändert:



Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ist das Produkt zweier Vektoren. Es heißt so, weil das Ergebnis ein Skalar, also eine Zahl ist. Es berechnet sich aus dem Produkt der Beträge der Vektoren und dem Cosinus des Winkels, den die Vektoren zueinander einnehmen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta)$$

Stehen zum Beispiel die Vektoren senkrecht auf einander, so ergibt sich:

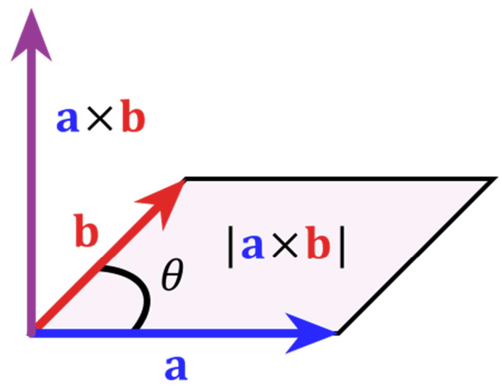
$\cos(\theta) = 0$ und damit $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Im gebräuchlichen kartesischen Koordinatensystem lässt sich das Skalarprodukt wie folgt berechnen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

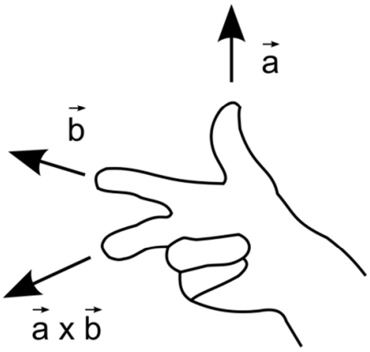
Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt wird auch vektorielles Produkt genannt. Es wird durch das Symbol × dargestellt. Das Ergebnis ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht, die die beiden anderen aufspannen. Die Länge des Vektors entspricht dem Flächeninhalt der Fläche, die die beiden anderen Vektoren aufspannen.



Es gilt: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\theta)$

Die Richtung kann man mit der „Rechte-Hand-Regel“ ermitteln:



Im kartesischen Koordinatensystem erfolgt die Berechnung nach:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor

Als Einheitsvektor bezeichnet man jeden Vektor mit der Länge (Betrag) 1. Jeder Vektor ist ein Vielfaches seines Einheitsvektors.

Für jeden Vektor erhält man den zugehörigen Einheitsvektor, wenn man ihn mit dem Kehrwert seines Betrages multipliziert:

$$\overrightarrow{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$