Basistext – Determinanten (Kurzfassung)

Definition

In der Linearen Algebra ist die Determinante eine Funktion, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet. Die Funktion wird mit „det“ abgekürzt. Die runden Matrixklammern werden durch gerade Striche ersetzt.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Die Determinante wird z.B. bei der Cramer'schen Regel zur Berechnung eines linearen Gleichungssystems verwendet. Es gilt ferner, dass ein lineares Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist.

Berechnung

In dieser Kurzfassung soll lediglich auf die Berechnung der Determinanten von 2 x 2- bzw. 3 x 3-Matrizen eingegangen werden.

<u>2 x 2 - Matrix</u>

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

3 x 3 - Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$
$$= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2}$$

Man stelle sich die einzelnen Summanden am besten als Diagonalen vor. Läuft die Diagonale auf der einen Seite aus der Matrix, kommt sie auf der anderen Seite wieder hinein:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}$$

Die negativen Summanden ergeben sich aus den aufwärts laufenden Diagonalen:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 = 4 + 0 - 6 - 4 - 15 - 0 = -21$$