Basistext - Gauß Verfahren

Mit dem Gauß Verfahren lassen sich Gleichungssysteme beliebiger Größe lösen.

Anhand eines Beispiels soll dieses Verfahren erläutert werden:

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -9$

$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$

$-x_1 + x_2 - 2x_3 = -8$

Alle Variablen sollten sortiert sein und die einfachen Zahlen stehen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens.

Um Schreibarbeit zu sparen und damit alles übersichtlich bleibt vereinfachen wir das System indem wir nur die Koeffizienten notieren:

1 2 -2 | -9

-2 1 3 | 1

-1 1 -2 | -8

Ziel ist es folgende Struktur zu erreichen:

x x x | x

0 x x | x

0 0 x | x

Dabei stehen alle x für beliebige Zahlen. Die Positionen unterhalb der Hauptdiagonalen sollen also mit Nullen gefüllt sein.

Beim Gauß Verfahren sind folgende Operationen erlaubt:

1) Vertauschen von Zeilen
2) Eine Zeile wird mit einer Zahl multipliziert
3) Zwei Zeilen werden addiert

Außerdem sind natürlich Kombinationen möglich (Eine mit einer Zahl multiplizierten Zeile zu einer anderen Zeile addieren).

In unserem Beispiel soll an der ersten Position in der zweiten Zeile eine 0 entstehen. Dazu multiplizieren wir die erste Zeile mit 2 und addieren sie zur zweiten Zeile:

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 2 & -2 & -9 & \quad \cdot 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & \\ -1 & 1 & -2 & -8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 5 & -1 & -17 \\ -1 & 1 & -2 & -8 \end{array}$$

Nun addieren wir Zeile 1 zu Zeile 3 damit in der dritten Zeile an der ersten Position eine 0 erscheint:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 5 & -1 & -17 \\ 0 & 3 & -4 & -17 \end{array}$$

Nun sollte durch Addition der zweiten und dritten Zeile an Position 2 der dritten Zeile eine 0 entstehen. Dieses ist nur zu erreichen indem man beide Zeilen zunächst multipliziert. Ein gemeinsames Vielfaches von 3 und 5 ist 15. Wir multiplizieren also Zeile 2 mit 3 und Zeile 3 mit -5:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 15 & -3 & -51 \\ 0 & -15 & 20 & 85 \end{array}$$

Nun addieren wir Zeile 2 zu Zeile 3:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 15 & -3 & -51 \\ 0 & 0 & 17 & 34 \end{array}$$

Wir übersetzen Zeile 3 wieder in die normale Schreibweise:

$17x_3 = 34 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2$

Nun übersetzen wir Zeile 2:

$15x_2 - 3x_3 = -51$

Wir ersetzen x_3:

$15x_2 - 6 = -51 \quad \Rightarrow \quad 15x_2 = -45 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -3$

Nun übersetzen wir noch Zeile 1:

$x_1 + 2x_2 – 2x_3 = -9$

wir setzen die Werte für x_2 und x_3 ein:

$x_1 – 6 – 4 = -9 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

<u>Weiteres Beispiel:</u>

$2b + 3c - d = 1$

$2a - 2b + c + 2d = -5$

$a + 2b + 4c - d = 1$

$3a - b + 2c - d = 2$

Zunächst vereinfachen wir die Schreibweise:

0 2 3 -1 | 1

2 -2 1   2 | -5

1 2 4 -1 | 1

3 -1 2 -1 | 2

Da die Position 1 der ersten Zeile nicht besetzt, ist tauschen wir die erste Zeile mit der dritten:

1 2 4 -1 | 1   · (-2)   · (-3)

2 -2 1   2 | -5

0 2 3 -1 | 1

3 -1 2 -1 | 2

Wir multiplizieren Zeile 1 mit -2 und addieren sie zur Zeile 2. Außerdem multiplizieren wir Zeile 1 mit -3 und addieren sie zur Zeile 4:

1   2 4 -1 | 1

0 -6 -7   4 | -7

0 2 3 -1 | 1

0 -7 -10 2 | -1

Wir tauschen die Zeilen 2 und 3. Die 2 ist für weitere Berechnungen an Position 2 günstiger als die -6:

1   2 4 -1 | 1

0 2 3 -1 | 1   · 3

0 -6 -7   4 | -7

0 -7 -10 2 | -1

Wir multiplizieren Zeile 2 mit 3 und addieren sie zur Zeile 3:

1 2 4 -1 | 1

0 2 3 -1 | 1 · 7

0 0 2 1 | -4

0 -7 -10 2 | -1 · 2

Wir multiplizieren Zeile 2 mit 7 und addieren sie zum Zweifachen der Zeile 4:

1 2 4 -1 | 1

0 2 3 -1 | 1

0 0 2 1 | -4

0 0 1 -3 | 5

Wir tauschen die Zeilen 3 und 4:

1 2 4 -1 | 1

0 2 3 -1 | 1

0 0 1 -3 | 5 · (-2)

0 0 2 1 | -4

Wir multiplizieren Zeile 3 mit -2 und addieren sie zur Zeile 4:

1 2 4 -1 | 1

0 2 3 -1 | 1

0 0 1 -3 | 5

0 0 0 7 | -14

Wir übersetzen Zeile 4:

7d = -14 => d = -2

Wir übersetzen Zeile 3 und setzen d ein:

c -3(-2) = 5 => c = -1

Wir übersetzen Zeile 2 und setzen c und d ein:

$2b + 3(-1) - (-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$

Wir übersetzen Zeile 1 und setzen b, c und d ein:

$a + 2 \cdot 1 + 4(-1) - (-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$