Basistext – Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren mit dem man eine Aussage für alle Natürlichen Zahlen beweist. Dabei geht man in zwei Schritten vor:

1) Man beweist die Aussage für n=1.
2) Man zeigt, dass die Aussage für n+1 gilt, unter der Voraussetzung, dass sie für n gilt. Hierbei muss die Aussage für n nicht überprüft werden.

Der erste Schritt wird Induktionsanfang und der zweite Schritt Induktionsschritt genannt.

Teilweise werden Aussagen bewiesen, die erst ab einem bestimmten n gelten. Hierbei wird der Induktionsanfang entsprechend größer gewählt.

Im Nachfolgenden werden einige Beispiele für vollständige Induktionen aufgeführt:

1) Beweise: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

   <u>n=1</u>:

   $$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 = n^2$$

   <u>n -> n+1</u>:

   $$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

2) Beweise, dass für alle $n \in N$ gilt: $n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ ist ganzzahlig durch 3 teilbar ist.

<u>n=1</u>:
$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ist durch 3 teilbar

<u>n -> n+1</u>:

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) &= (n^2 + 3n + 2)(n+3)\\ &= n^3 + 6n^2 + 11n + 6\\ &= (n^3 + 3n^2 + 2n) + (3n^2 + 9n + 6)\\ &= n(n+1)(n+2) + 3(n^2 + 3n + 2)\end{aligned}$$

$n(n+1)(n+2)$ ist durch 3 teilbar und $3(n^2 + 3n + 2)$ ebenfalls.

3) Beweise: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>n=1</u>:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

<u>n -> n+1</u>:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

4) Beweise: Für alle n > 3 gilt: $2^n \geq n^2$

<u>n=4</u>:

$$2^4 = 16 \geq 4^2$$

<u>n -> n+1</u>:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 = n^2 + n \cdot n \geq n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n$$
$$\geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$