Basistext – Determinanten

Definition

In der Linearen Algebra ist die Determinante eine Funktion, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet. Die Funktion wird mit „det“ abgekürzt. Die runden Matrixklammern werden durch gerade Striche ersetzt.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Die Determinante wird z.B. bei der Cramer’schen Regel zur Berechnung eines linearen Gleichungssystems verwendet. Es gilt ferner, dass ein lineares Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist.

Berechnung einfacher Determinanten

<u>2 x 2 - Matrix</u>

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

<u>3 x 3 - Matrix</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$
$$= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,2} \cdot a_{3,3} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2}$$

Man stelle sich die einzelnen Summanden am besten als Diagonalen vor. Läuft die Diagonale auf der einen Seite aus der Matrix, kommt sie auf der anderen Seite wieder hinein:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}$$

Die negativen Summanden ergeben sich aus den aufwärts laufenden Diagonalen:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 = 4 + 0 - 6 - 4 - 15 - 0 = -21$$

<u>höhere Matrizen</u>

Theoretisch kann man das gleiche Verfahren auch für höhere Matrizen anwenden. Da die Berechnung allerdings sehr umfangreich wird, verwendet man die nachfolgenden Verfahren.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Es gelten folgende Regeln:

1) Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen das Ergebnis der Determinante von A
   Beispiel:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -4$$

2) Wenn man zwei Zeilen oder Spalten vertauscht wechselt das Vorzeichen der Determinante.
   Beispiel:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

3) Die Determinante ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile oder Spalte addiert.
Beispiel:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+2\cdot 1 & 1 \\ -1 & 2+2\cdot(-1) & 3 \\ 0 & 1+2\cdot 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

4) Multipliziert man eine Spalte oder Zeile mit einer Konstanten c, so wird die Determinante mit c multipliziert.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cdot c & 1 \\ -1 & 2\cdot c & 3 \\ 0 & 1\cdot c & -2 \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Ziel ist es, die Determinante einer Dreiecksmatrix nach 1) zu berechnen. Um dieses zu erreichen, wird die Determinante mittels der anderen drei Regeln entsprechend umgeformt.

Laplace'scher Entwicklungssatz

Mit dem Laplace'schem Entwicklungssatz kann man eine Determinante nach einer Zeile bzw. Spalte entwickeln und damit vereinfachen. Da die Formel relativ kompliziert aussieht, soll der Entwicklungssatz anhand eines Beispiels erläutert werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Man kann diese Determinante nach jeder Zeile bzw. Spalte entwickeln. Um Rechenaufwand zu sparen empfiehlt es sich jedoch eine Zeile oder Spalte auszuwählen, die möglichst viele Nullen und möglichst kleine Zahlen enthält. In diesem Beispiel bietet sich die erste Spalte an.

Man beginnt mit der ersten Zahl in der betreffenden Spalte. Man stellt sich die Determinante ohne die Zeile und Spalte vor, in der die Zahl steht:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Diese neue Determinante wird mit der Zahl, nach der entwickelt wurde, multipliziert. In diesem Fall die 1.

Dieses wird mit der nächsten Zahl in der ersten Spalte fortgesetzt.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Auch hier wird mit dem Faktor 1 multipliziert.

Nun fahren wir mit der letzten Ziffer in der Spalte fort:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Hier wird allerdings mit dem Faktor 0 multipliziert. Deshalb entfällt dieser Ausdruck komplett. Das ist der Vorteil, wenn Nullen in der zu entwickelnden Spalte bzw. Zeile sind.

Beim Aufsummieren der einzelnen Ergebnisse muss man darauf achten, dass die Vorzeichen alternierend sind. Das Element links oben besitzt das Vorzeichen ‚+'. Geht man nach rechts oder nach unten wechselt das Vorzeichen bei jedem Schritt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Für unser Beispiel ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= [2 \cdot 2 - 3 \cdot 1] - [2 \cdot 2 - 1 \cdot 1] = 1 - 3 = -2$$

Man kann analog nach einer Zeile entwickeln.

Weitere Eigenschaften

Regeln nach Weierstraß

Weierstraß hat drei Regeln (Axiome) aufgestellt:

1) Die Einheitsmatrix hat die Determinante
   det E_n = 1

2) Sind zwei Spalten gleich, ist die Determinante gleich 0.
   Man kann zeigen, dass daraus zwingend folgt, dass sich das Vorzeichen ändert, wenn man zwei Spalten vertauscht.

3) Jede Spalte ist linear und kann auseinander gezogen werden:
   Beispiel:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1+0 \\ 1 & 2 & 2+1 \\ 0 & 1 & 1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinantenproduktsatz

Es gilt:

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

Transponierte Matrix

Eine Matrix A und ihre transponierte Matrix A^T haben dieselbe Determinante.

$$\det A = \det A^T$$