Skript Analysis

sehr einfach

Erstellt: 2017

Von: www.Mathe-in-Smarties.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript ist eine Einführung in die Analysis. Es wendet sich in erster Linie an Schüler, die sehr unsicher sind bzw. den Einstieg verpasst haben und nun vor dem Problem stehen, gar nichts mehr zu verstehen.

Die Darstellung im Skript ist stark vereinfacht!!!

Dieses Skript reicht nicht aus zur Abiturvorbereitung!!!

Zu allen Bereichen gibt es zunächst eine theoretische Einführung mit Beispielen. Anschließend steht noch Übungsmaterial zur Verfügung. Die entsprechenden Lösungen findet man abgetrennt im hinteren Teil des Skriptes. Alle Beispiele und Aufgaben können und sollten ohne Taschenrechner berechnet werden.

Das gesamte Material wurde nach besten Wissen und Gewissen erstellt. Für trotzdem vorhandene Fehler kann naturgemäß nicht gehaftet werden.

1. Funktionen

Eine Funktion ist eine Abbildung. Dabei wird jedem x-Wert höchstens ein y-Wert zugeordnet.

Wir betrachten eine Funktion f(x):

$$f(x) = 3x - 2$$

$3x - 2$ ist dabei die Funktionsvorschrift. Wir können nun einzelne x-Werte einsetzen. Wir erhalten so die entsprechenden y-Werte:

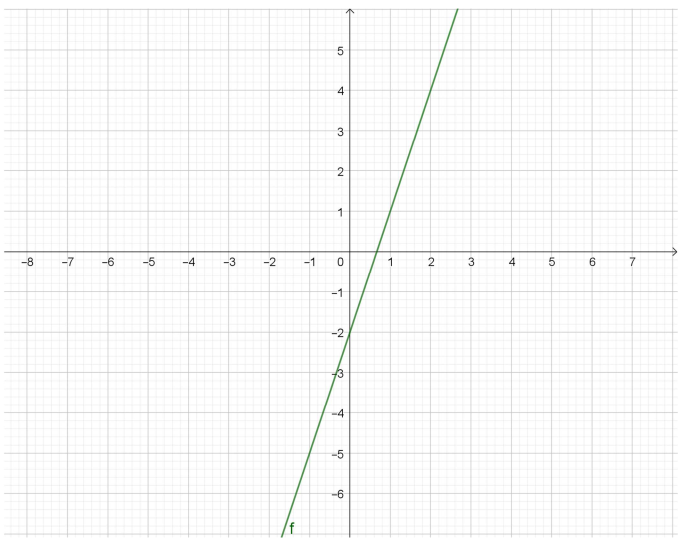
Für x = 1 gilt:

$$f(1) = 3 * 1 - 2 = 1$$

Man kann also für die Funktion auch schreiben:

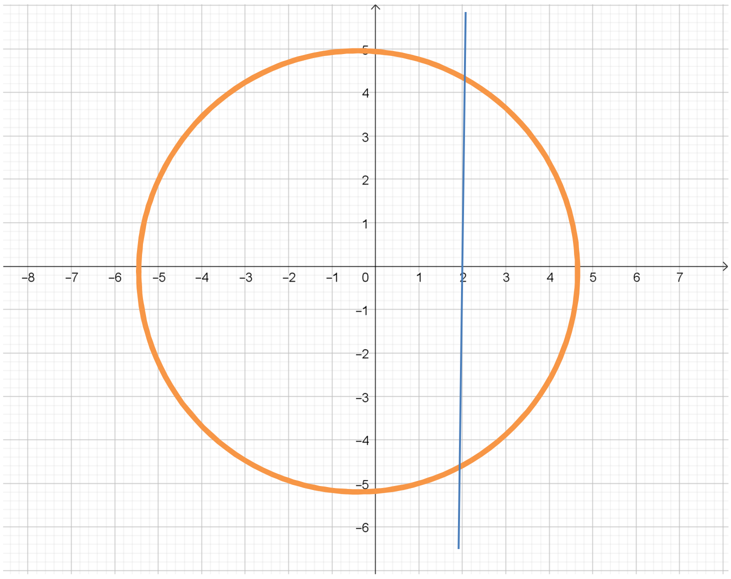
$$f(x) = y = 3x - 2$$

Man kann Funktionen in einem Koordinatensystem eintragen. Für f(x) gilt dann:



Wichtig ist, dass man für jeden x-Wert höchstens einen y-Wert erhält!

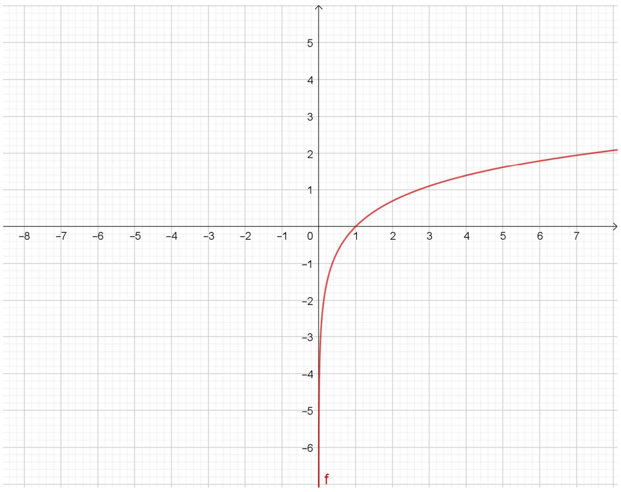
Beispiel für eine Kurve, die keine Funktion ist:



Für x = 2 erhält man hier zwei y-Werte (bei ca. 4,3 und bei ca. -4,7). Ein Kreis ist also keine Funktion!

Weiteres Beispiel für eine Funktion:

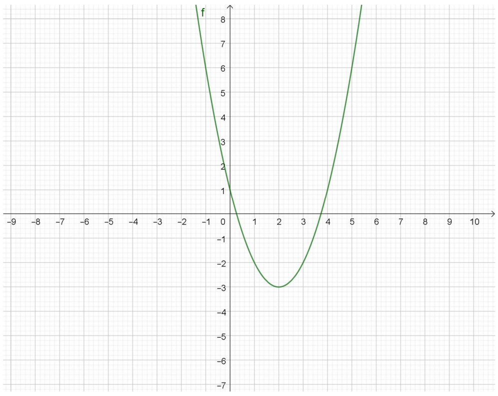
$$f(x) = \ln(x)$$



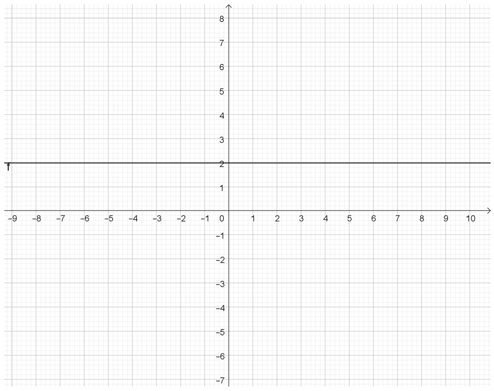
Die Funktion existiert nur für positive x-Werte. Man sagt: Die Funktion ist nur für positive x-Werte definiert. Für x = 0 oder für negative x-Werte existieren also keine y-Werte.

Aufgabe 1

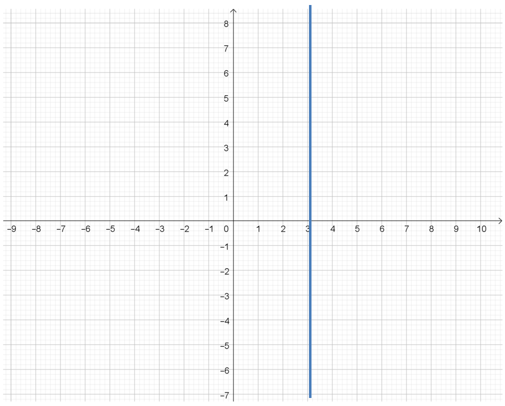
Welche der Kurven sind Funktionen?



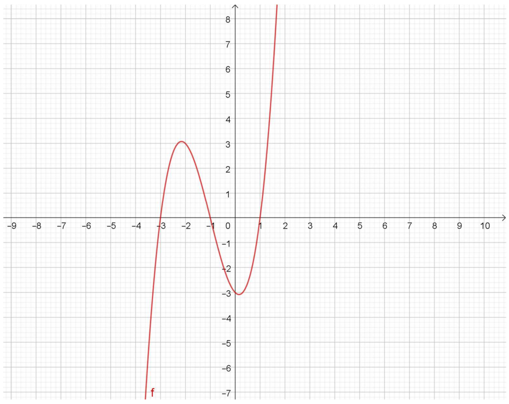
1



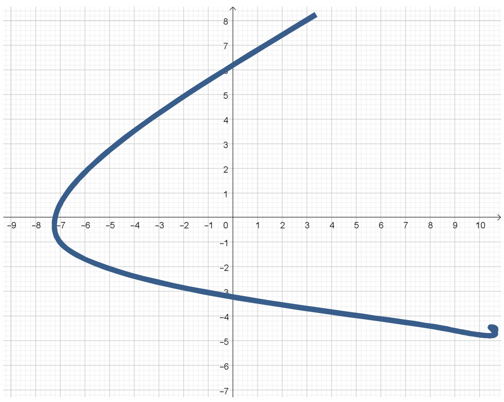
2



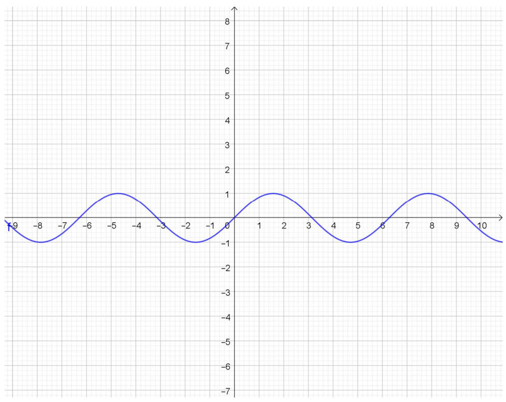
3



4



5



6

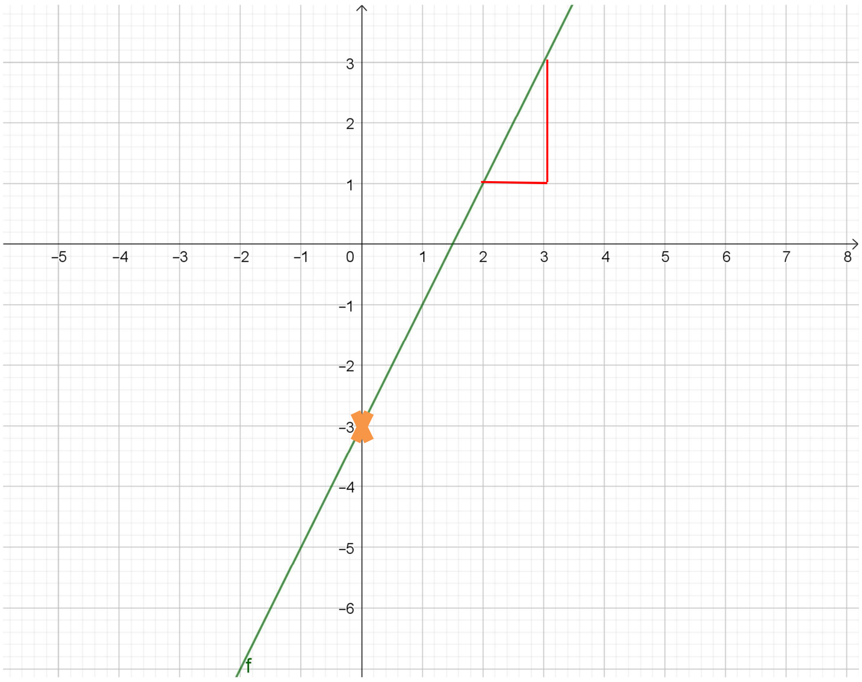
2. Geraden

Die allgemeine Geradengleichung lautet:

$f(x) = y = mx + b$

Dabei ist m die Steigung der Geraden und b ist der Achsenabschnitt, also der y-Wert für x = 0.

Beispiel: $f(x) = 2x - 3$ Steigung = 2 und Achsenabschnitt = -3



In rot ist das sogenannte Steigungsdreieck eingezeichnet. Wenn man eine Einheit nach rechts geht, geht man zwei Einheiten nach oben. Die Steigung berechnet man dann mit: 2 : 1 = 2. Bei einer fallenden Geraden geht man im Steigungsdreieck nach unten. Die Steigung ist dann negativ.

Der Achsenabschnitt ist -3. Also liegt der Punkt (0|-3) auf der Geraden.

Aufgabe 2

Bestimme die Steigung m und den Achsenabschnitt b

a) $f(x) = 3x - 2$
b) $f(x) = -5x + 3$

Schnittpunkt mit der x-Achse

Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse nennt man Nullstellen. Alle Nullstellen haben gemeinsam, dass der zugehörige y-Wert ‚0' ist.

Beispiel:

$f(x) = y = 3x - 6$

Wenn man die Nullstelle ermitteln will, setzt man y = 0. Man erhält:

$3x - 6 = 0$ => $3x = 6$ => $x = 2$

Aufgabe 3

Bestimme die Nullstellen

a) $f(x) = 4x - 2$
b) $f(x) = 3x + 9$
c) $f(x) = 2x$
d) $f(x) = 3$

Bestimmung einer Geraden aus zwei Punkten

Die Bestimmung einer Geraden aus zwei vorgegebenen Punkten soll anhand eines Beispiels aufgezeigt werden:

Sei P (2 | 1) und Q (4 | 5)

Zunächst berechnet man die Steigung, indem man die Differenz der y-Werte durch die Differenz der x-Werte teilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

Dabei ist es egal, ob man P – Q oder Q – P rechnet. Es muss nur in beiden Fällen gleich sein. Man kann also auch so rechnen:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-5}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Nun berechnet man den Achsenabschnitt:

P hat den x-Wert 2. Man muss also im Graphen von P zwei Einheiten nach links gehen, um zur y-Achse zu gelangen. Also muss man vom y-Wert von P zweimal die Steigung abziehen:

$$b = 1 - 2 * 2 = 1 - 4 = -3$$

Die Gerade lautet also:

$$y = 2x - 3$$

Aufgabe 4

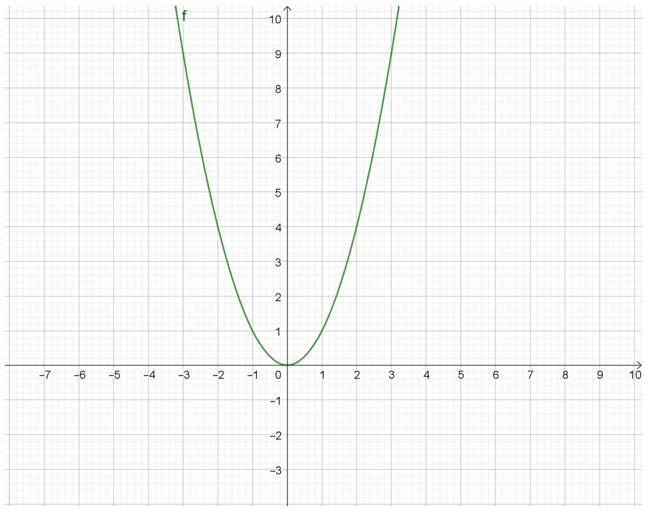
Bestimme die Geradengleichung

a) P (6 | 1) Q (3 | -2)
b) P (1 | 1) Q (3 | 2)
c) P (-1 | 1) Q (1 | 5)

3. Parabeln

Jede quadratische Funktion ist eine Parabel. Die einfachste Parabel ist die Normalparabel:

$$f(x) = x^2$$



Jede andere Parabel kann man von der Normalparabel abgeleitet werden. Sie kann flacher oder steiler verlaufen. Sie kann nach oben, unten, rechts oder links verschoben sein. Außerdem kann sie an der x-Achse gespiegelt, also nach unten offen sein. Selbstverständlich sind auch Kombinationen dieser Operationen möglich. Der Hoch- bzw. Tiefpunkt (in der Funktion oben bei (0;0)) heißt Scheitelpunkt.

Scheitelpunktform

Die Scheitelpunktform hat folgendes Aussehen:

$$y = a(x - b)^2 + c$$

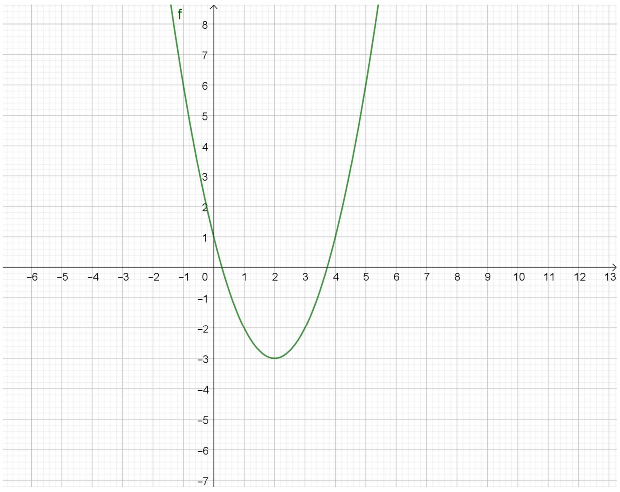
- a bestimmt wie steil die Parabel ist. Für a = 1 hat die Parabel die Form der Normalparabel. Ein negatives a bedeutet, die Parabel ist nach unten offen.
- b „verschiebt" die Parabel nach rechts oder links. Ist b positiv, wird die Parabel nach rechts verschoben. Vorsicht bei den Vorzeichen: Für b = 3 steht in der Klammer ‚x – 3'.

- c verschiebt die Parabel nach oben und unten.

Beispiel:

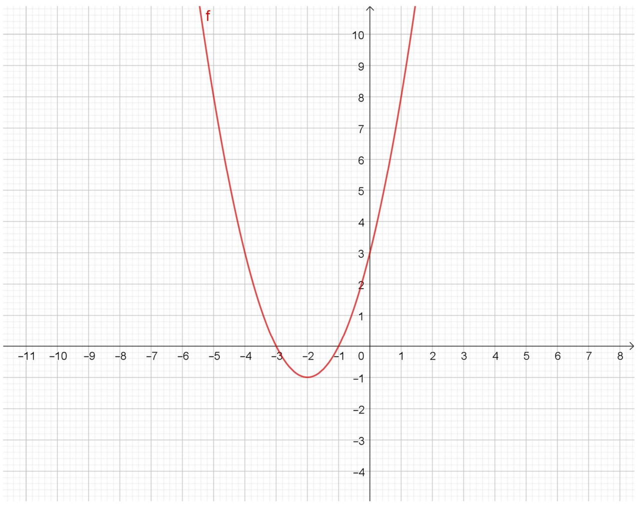
$f(x) = (x - 2)^2 - 3$

Die Normalparabel wird um zwei Schritte nach rechts und um 3 Schritte nach unten verschoben.



Aufgabe 5

Wie lautet die zugehörige Funktion des Graphen:



4. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen haben die allgemeine Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dabei sind a, b und c beliebige Reelle Zahlen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, quadratische Gleichungen zu lösen. Hier soll lediglich die p-q-Formel erläutert werden, da dieses Verfahren immer anwendbar ist.

Die p-q-Formel hat die allgemeine Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

Im Unterschied zur allgemeinen Form befindet sich vor dem x^2 kein Wert bzw. eine ‚1', die nicht geschrieben wird. Hat man also eine quadratische Gleichung vorliegen, die für a nicht den Wert ‚1' hat, muss man die gesamte Gleichung zunächst durch ‚a' teilen, um die p-q-Formel anwenden zu können.

Beispiel:

$2x^2 + 8x - 4 = 0$ Man teilt durch 2:

$x^2 + 4x - 2 = 0$

Nun hat man die gewünschte Form erreicht => p = 4 q = -2

Die Lösung hat nun folgendes Aussehen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Es gibt also zwei Lösungen. x_1 hat vor dem Wurzelzeichen ein ‚+' und x_2 ein '-,.

Bei dem Beispiel setzt man einfach die Werte von p und q ein:

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-2)} = -2 \pm \sqrt{2^2 + 2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Die Lösungsmenge lautet demnach:

$$L = \left\{-2 + \sqrt{6}\,;\; -2 - \sqrt{6}\right\}$$

Eine quadratische Gleichung hat im Regelfall zwei Lösungen. Ergibt der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen den Wert ‚0‘, so fällt das Wurzelzeichen weg und man erhält somit nur eine Lösung. Ergibt der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen einen negativen Wert, so hat die Gleichung keine Lösung, da ein negativer Wert unter einem Wurzelzeichen im Bereich der reellen Zahlen nicht erlaubt ist.

Aufgabe 6

Berechne x mit Hilfe der p-q-Formel

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$

b) $2x^2 + 6x - 4 = 0$

c) $x^2 + 8x - 9 = 0$

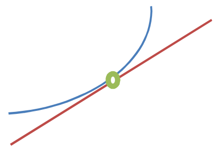
d) $x^2 + 8x + 16 = 0$

e) $x^2 - 4x + 10 = 0$

f) $5x^2 - 10x - 15 = 0$

5. Ableitungen

Um Ableitungen zu erklären braucht man zunächst den Begriff der Tangente. Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve in genau einen Punkt berührt.



Jede Gerade hat aber eine Steigung.

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle ist die Steigung der Tangent an eben dieser Stelle.

Da eine Funktion aber unendlich viele Stellen besitzt, muss man einen rechnerischen Weg finden, um die Ableitung für die gesamte Funktion festzulegen.

Ein Strich oben am Funktionsname drückt aus, dass es sich um die Ableitung dieser Funktion handelt: $f'(x)$

Die Ableitung der Ableitung, zweite Ableitung genannt, wird durch zwei Striche dargestellt: $f''(x)$

Folgende Rechenregeln gelten:

1) $f(x) = c \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0$
   Eine Konstante abgeleitet ergibt Null.

2) $f(x) = ax^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = anx^{n-1}$
   Man multipliziert den Ausdruck mit dem Exponenten n und reduziert den Exponenten um 1.

3) $f(x) = g(x) + h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$
   Bei Summen darf man die Summanden einzeln ableiten.

Beispiel:
$f(x) = x^3 + 2x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 4x$

4) Kettenregel:
$f(x) = g\big(h(x)\big) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = h'(x) * g'(h(x))$
Man spricht: „Innere Ableitung mal äußere Ableitung."
Beispiel:
$f(x) = e^{x^2}$
Dabei ist e^x die sogenannte Exponentialfunktion, die beim Ableiten unverändert bleibt. Der innere Bereich ist nun x^2. Abgeleitet erhalten wir: 2x. Da die Exponentialfunktion beim Ableiten sich nicht ändert, ergibt sich für die äußere Ableitung wieder: e^{x^2}
Daraus folgt:
$f'(x) = 2xe^{x^2}$

5) Produktregel:
$f(x) = u(x) * v(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$
Beispiel:
$f(x) = x^2 e^x \qquad u(x) = x^2 \quad v(x) = e^x$
$\qquad u'(x) = 2x \quad v'(x) = e^x$
$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$

Auf weitere Regeln soll hier verzichtet werden. Alle Regeln können selbstverständlich kombiniert werden.

Aufgabe 7

Leite ab:

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$

b) $f(x) = e^{5x-2}$

c) $f(x) = 4xe^x$

d) $f(x) = 5x - 8$

e) $f(x) = e^{4x}$

f) $f(x) = 3xe^{5x}$

6. Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion wird eine Funktionsvorschrift vorgegeben und man ermittelt verschiedene Merkmale („das Aussehen“) der Funktion.

Zu einer ausführlichen Kurvendiskussion gehören eine ganze Reihe von Untersuchungen. In diesem Skript sollen jedoch nur folgende (die wichtigsten) Punkte berücksichtigt werden:

- Nullstellen
- Extrema
- Wendestellen

Bevor diese Punkte untersucht werden können, braucht man die Begriffe „**notwendige Bedingung**“ und „**hinreichende Bedingung**“. Diese Ausdrücke sollen anhand eines Beispiels erklärt werden:

Wir haben die Vermutung, dass eine gesuchte Größe ‚x‘ den Wert ‚3‘ hat. Aus Messungen wissen wir das $x^2 = 9$ ist. Nun könnte man sagen $3^2 = 9$. Aber dieses ist kein Beweis, da die Gleichung auch für ‚-3‘ erfüllt ist: $(-3)^2 = 9$. Auf der anderen Seite kann ‚x‘ nicht ‚3‘ sein, wenn $x^2 = 9$ nicht gilt. Die Bedingung ist also **notwendig**, aber nicht ausreichend. Um einen korrekten Beweis zu führen, muss eine zweite Bedingung hinzukommen. Dieses könnte hier $x > 0$ sein. Damit scheidet die Lösung ‚-3‘ aus. Man spricht von einer **hinreichenden Bedingung**. Wichtig ist, dass beiden Bedingungen für sich allein genommen keine Beweise sind. Erst durch die Kombination ergibt sich der Beweis.

Folgende Kriterien müssen für Nullstellen, Extrema und Wendestellen erfüllt sein:

	notwendig	**hinreichend**
Nullstellen	$f(x) = 0$	$f(x) = 0$
Extrema	$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$ Maximum $f''(x) > 0$ Minimum
Wendestellen	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$

Nullstellen

Nullstellen sind Schnittpunkte mit der x-Achse. Alle Nullstellen haben also gemeinsam, dass y = 0 gilt. Deshalb ist die notwendige und die hinreichende Bedingung für Nullstellen: $f(x) = 0$. Um Nullstellen zu berechnen setzt man also die Funktionsvorschrift gleich ‚0' und berechnet x.

Beispiel:

$f(x) = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2$

Die Funktion hat an den Stellen -2 und 2 Nullstellen.

Aufgabe 8

Berechne die Nullstellen:

a) $f(x) = 3x - 6$

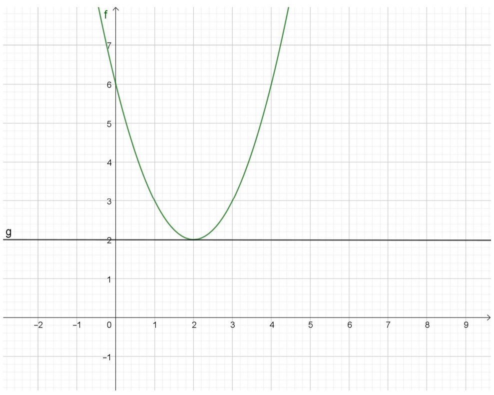
b) $f(x) = x^2 - 9$

c) $f(x) = x^3 - x$

Extrema

Extrema sind lokale Hoch- bzw. Tiefpunkte. Legt man an diesen Stellen eine Tangente an, so ist die Steigung dieser Tangente ‚0'.

Beispiel:



Das notwendige Kriterium ist also: $f'(x) = 0$.

Das hinreichende Kriterium ist: $f''(x) \neq 0$.

Dabei gilt für ein Maximum $f''(x) < 0$ und für ein Minimum $f''(x) > 0$.

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 27x + 10$

Man bildet die erste Ableitung, setzt sie gleich Null und berechnet x:

$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = -3$

Nun bildet man die zweite Ableitung und setzt die beiden gefundenen möglichen Extremstellen ein:

$f''(x) = 6x$

$f''(3) = 6 * 3 = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad Minimum$

$f''(-3) = 6 * (-3) = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum$

Aufgabe 9

Bestimme die Nullstellen

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$

b) $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 3$

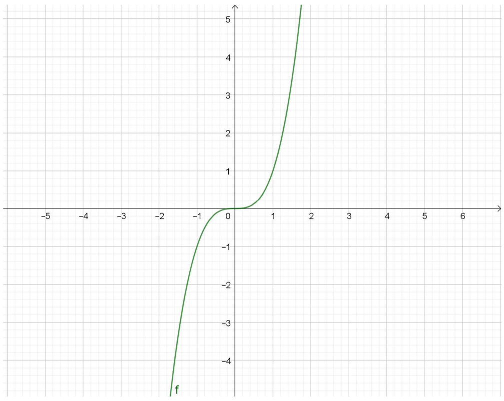
c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = 2x^3 + 6x$

Wendestellen

Als Wendestellen werden diejenigen x-Werte bezeichnet, bei denen die Funktion von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung übergeht oder umgekehrt.

Beispiel: $f(x) = x^3$



Für negative x-Werte ist die Kurve rechtsgekrümmt. Bei dem Punkt (0|0) erfolgt der Wechsel zu einer Linkskrümmung. Der Punkt (0|0) ist eine Wendestelle.

Das notwendige Kriterium ist: $f''(x) = 0$.

Man bildet also die zweite Ableitung der Funktion, setzt sie gleich Null und berechnet **mögliche** Wendestellen.

Das hinreichende Kriterium ist: $f'''(x) \neq 0$.

Man setzt die möglichen Nullstellen in die dritte Ableitung ein. Wenn das Ergebnis nicht Null ist, liegt eine Wendestelle vor.

Aufgabe 10

Berechne die Wendestellen

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

b) $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4x - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$

7. Integration

Die Integration ist vereinfacht gesagt die Umkehrung der Ableitung. Symbolisiert wird sie durch das Integralzeichen ‚$\int$ ′. Dieses Zeichen steht zu Beginn eines Terms, der integriert werden soll. Abgeschlossen wird der Ausdruck durch ein ‚dx‘.

Beispiel:

$$\int 3x^2 - 4\,dx$$

<u>Integrationsregeln:</u>

1) $\int a\,dx = ax + c$

   Man integriert eine Konstante indem man sie mit x multipliziert und eine allgemeine Konstante c addiert.

   Beispiel: $\int 3\,dx = 3x + c$

   Warum „+ c“ ? Sowohl „ 3x + 6“ als auch „3x + 2“ ergeben abgeleitet „3“. Das „c“ kann also jeden beliebigen Wert annehmen.

   „$ax + c$“ nennt man **Stammfunktion**.

2) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c$

   Der Exponent wird um 1 erhöht und der Faktor vor der Potenz wird durch den neuen Exponenten dividiert.

   Beispiel: $\int 8x^3\,dx = \frac{8}{4}x^4 + c = 2x^4 + c$

3) $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

   Summen dürfen einzeln integriert werden!

Weitere Integrationsregeln werden in diesem Skript nicht behandelt.

bestimmte Integrale:

Bisher wurde die komplette Funktion integriert. Es kann jedoch sein, dass man nur einen gewissen Abschnitt integrieren will.

Beispiel:

$f(x) = x^2$

Diese Funktion soll im Abschnitt x = 0 bis x = 1 integriert werden. ‚0‘ nennt man die untere Grenze und ‚1‘ die obere Grenze. Man schreibt:

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Nun wendet man die Integrationsregeln von oben an. Dabei werden die Grenzen nach einem senkrechte Strich geschrieben:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\,|_0^1$$

Nun setzt man die obere Grenze für x ein. Davon zieht man den gleichen Term mit eingesetzter unterer Grenze ab:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\,|_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 11

Integriere

a) $\int 3x^2 - 5x + 3\ \ dx$

b) $\int 4x + 5\ \ dx$

c) $\int 4x^5 - 3x^3 + x^2 + 2\,dx$

d) $\int_0^2 4x - 3\,dx$

e) $\int_{-1}^1 3x^2 + 4x - 2\,dx$

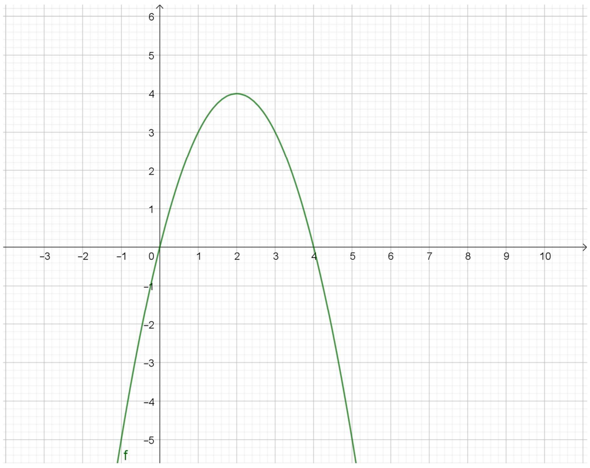
f) $\int_{-2}^{-1} 5x\,dx$

Flächenberechnung

Man kann die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse berechnen, indem man die Funktion integriert.

Beispiel:

Berechne die Fläche, die $f(x) = -x^2 + 4x$ mit der x-Achse einschließt.



Man berechnet zunächst die Nullstellen:

$$-x^2 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(-x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Die gefundenen Nullstellen sind nun die Integrationsgrenzen:

$$\int_0^4 -x^2 + 4x \, dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \,|_0^4$$

$$= \left(-\frac{1}{3} * 4^3 + 2 * 4^2\right) - \left(-\frac{1}{3} * 0^3 + 2 * 0^2\right) = \left(-\frac{64}{3} + 32\right) - 0$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{96}{3} = \frac{32}{3}$$

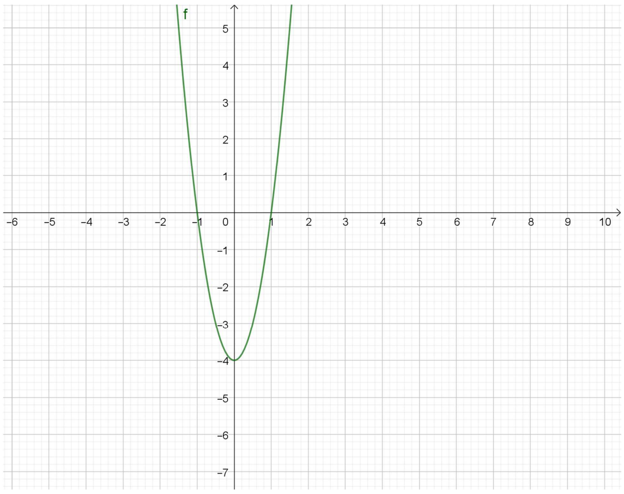
Problematisch wird dieses Verfahren, wenn die Fläche ganz oder teilweise unterhalb der x-Achse liegt. Man erhält dann einen negativen Wert. Negative Flächen gibt es aber nicht. Deshalb gilt der Grundsatz bei Flächenberechnungen:

Man darf nicht über Nullstellen hinweg integrieren.

Stattdessen integriert man einzeln von Nullstelle zu Nullstelle, setzt die einzelnen Ergebnisse in Betragsstriche und addiert sie. So ist sichergestellt, dass alle Flächen positiv in Ergebnis einfließen.

<u>Beispiel:</u>

$f(x) = 4x^2 - 4$



Berechnet soll die Fläche, die die Funktion mit der x-Achse einschließt zwischen x = -2 und x = 2.

Zunächst Berechnet man die Nullstellen:

$$4x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1$$

Nun wird einzeln integriert und nicht die Betragsstriche vergessen:

$$\left|\int_{-2}^{-1} 4x^2 - 4\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} 4x^2 - 4\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} 4x^2 - 4\,dx\right|$$

$$= \left|\frac{4}{3}x^3 - 4x \,\Big|_{-2}^{-1}\right| + \left|\frac{4}{3}x^3 - 4x \,\Big|_{-1}^{1}\right| + \left|\frac{4}{3}x^3 - 4x \,\Big|_{1}^{2}\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{4}{3} + 4\right) - \left(-\frac{32}{3} + 8\right)\right| + \left|\left(\frac{4}{3} - 4\right) - \left(-\frac{4}{3} + 4\right)\right| + \left|\left(\frac{32}{3} - 8\right) - \left(\frac{4}{3} - 4\right)\right|$$

$$= \left|\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\right| + \left|\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right| = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 16$$

Würde man über Nullstellen hinweg integrieren wäre das Ergebnis $\frac{16}{3}$.

Aufgabe 12

Berechne die Flächen, die die Funktion in dem angegebenen Intervall mit der x-Achse einschließt:

a) $f(x) = 2x$ von -2 bis 1

b) $f(x) = x^2 - 4$ von -1 bis 1

c) $f(x) = 3x + 6$ von 0 bis 3

<u>Flächen zwischen Funktionen</u>

Um die Fläche zwischen Funktionen zu berechnen zieht man die Funktionsvorschriften voneinander ab und integriert

Beispiel:

$f(x) = -x^2 + 2 \qquad g(x) = 1$

Zunächst berechnet man die Schnittpunkte, um die Integrationsgrenzen zu ermitteln. Dazu werden die Funktionen gleichgesetzt:

$-x^2 + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1$

Nun zieht man g von f ab und integriert:

$$\int_{-1}^{1} -x^2 + 1\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + x \,\Big|_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 13

Berechne die Fläche zwischen den Funktionen

a) $f(x) = x^2 - 9 \qquad g(x) = 8$

b) $f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = x + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 2x + 5 \qquad g(x) = x^2 - 2x + 14$

Lösungen

Aufgabe 1

Die Kurven 1, 2, 4 und 6 sind Funktionen.

Die Kurve 3 hat für x = 3 unendlich viele y-Werte und sie ist damit keine Funktion.

Die Kurve 5 hat für viele x-Werte zwei y-Werte und sie ist damit keine Funktion.

Aufgabe 2

a) m = 3 b = -2
b) m = -5 b = 3

Aufgabe 3

a) $4x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$
b) $3x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = -3$
c) $2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
d) Die Funktion hat an jeder Stelle den Wert 3. Sie hat somit keine Nullstellen.

Aufgabe 4

a) $m = \frac{1-(-2)}{6-3} = \frac{3}{3} = 1 \qquad b = -2 - 3 * 1 = -5$
$y = x - 5$
b) $m = \frac{2-1}{3-1} = \frac{2}{3} \qquad b = 1 - 1 * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
c) $m = \frac{5-1}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2 \qquad b = 1 + 1 * 2 = 3$
$y = 2x + 3$

Aufgabe 5

Die Normalparabel ist um zwei Schritte nach links und einen Schritt nach unten verschoben. Die Funktion lautet also:

$f(x) = (x+2)^2 - 1$

Aufgabe 6

a) p = -3 q = -4

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $\quad$ $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

b) zuerst durch 2 teilen!

p = 3 q = -2

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

c) p = 8 q = -9

$$x_{1,2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 9} = -4 \pm \sqrt{25}$$

$x_1 = -4 + 5 = 1$ $\quad$ $x_2 = -4 - 5 = -9$

d) p = 8 q = 16

$$x_{1,2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 16} = -4 \pm \sqrt{0} \qquad x = -4$$

e) p = -4 q = 16

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 16} = 2 \pm \sqrt{-12}$$ => keine Lösung!

f) p = -2 q = -3

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = 1 \pm \sqrt{4}$$

$x_1 = 1 + 2 = 3 \qquad x_2 = 1 - 2 = -1$

Aufgabe 7

a) $f'(x) = 6x - 7$

b) $f'(x) = 5e^{5x-2}$

c) $f'(x) = 4e^x + 4xe^x = 4(1+x)e^x$

d) $f'(x) = 5$

e) $f'(x) = 4e^{4x}$

f) $f'(x) = 3e^{5x} + 15xe^{5x}$

$= 3(1+5x)e^{5x}$

Aufgabe 8

a) $3x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

b) $x^2 - 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \lor \ x = -3$

c) $x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \lor \ x = -1 \ \lor \ x = 1$

Aufgabe 9

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$

$f'(x) = x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \ \lor \ x = -2$

$f''(x) = 2x$

$f''(2) = 4 \neq 0 \qquad f''(-2) = -4 \neq 0 \qquad L = \{-2; 2\}$

b) $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 3$

$f'(x) = 3x^2 + 9x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0$

pq-Formel! p = 3 q = -4

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -4$

$f''(x) = 6x + 9$

$f''(1) = 6 + 9 = 15 \neq 0 \quad f''(-4) = -24 + 9 = -15 \neq 0 \quad L = \{-2; 2\}$

c) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$f''(x) = 6x$

$f''(0) = 0$ Keine Nullstelle!

d) $f(x) = 2x^3 + 6x$

$f'(x) = 6x^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 = -6 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1$ Widerspruch!

Keine Nullstelle!

Aufgabe 10

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$

$f''(x) = 6x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$

$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0$ Es liegt eine Wendestelle vor.

b) $f(x) = 5x^4 - 5x^2 + 4x - 3$

$f'(x) = 20x^3 - 10x + 4$

$f''(x) = 60x^2 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 60x^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{6}}$

$f'''(x) = 120x \qquad f'''\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = \frac{120}{\sqrt{6}} \neq 0$ Wendestelle!

c) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

$f''(x) = x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 2$

$f'''(x) = 2x$

$f'''(-2) = -4 \neq 0 \qquad f'''(2) = 4 \neq 0 \qquad$ 2 Wendestellen

Aufgabe 11

a) $\int 3x^2 - 5x + 3 \ dx = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$

b) $\int 4x + 5 \, dx = 2x^2 + 5x$

c) $\int 4x^5 - 3x^3 + x^2 + 2 \, dx = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x$

d) $\int_0^2 4x - 3 \, dx = 2x^2 - 3x \,\Big|_0^2 = (2 * 2^2 - 3 * 2) - (2 * 0^2 - 3 * 0)$

$= 2 - 0 = 2$

e) $\int_{-1}^1 3x^2 + 4x - 2 \, dx = x^3 + 2x^2 - 2x \,\Big|_{-1}^1$

$= (1^3 + 2 * 1^2 - 2 * 1) - ((-1)^3 + 2 * (-1)^2 - 2 * (-1))$

$= (1 + 2 - 2) - (-1 + 2 + 2) = 1 - 3 = -2$

f) $\int_{-2}^{-1} 5x \, dx = \frac{5}{2}x^2 \,\Big|_{-2}^{-1} = \frac{5}{2} * (-1)^2 - \frac{5}{2}(-2)^2 = \frac{5}{2} - 10 = \frac{5}{2} - \frac{20}{2} = -\frac{15}{2}$

Aufgabe 12

a) $2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$$\left|\int_{-2}^{0} 2x \, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} 2x \, dx\right| = \left|x^2 \,\Big|_{-2}^{0}\right| + \left|x^2 \,\Big|_{0}^{1}\right| = |0 - 4| + |1 - 0| = 5$$

b) $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 2$

Die Nullstellen sind außerhalb des Intervalls. Deshalb kann normal integriert werden, allerdings mit Betragsstriche.

$$\left|\int_{-1}^{1} x^2 - 4\,dx\right| = \left|\frac{1}{3}x^3 - 4x\,\Big|_{-1}^{1}\right| = \left|\left(\frac{1}{3} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 4\right)\right| = \left|-\frac{11}{3} - \frac{11}{3}\right|$$

$$= \frac{22}{3}$$

c) $3x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

Die Nullstellen sind außerhalb des Intervalls. Deshalb kann normal integriert werden, allerdings mit Betragsstriche.

$$\left|\int_{0}^{3} 3x + 6\ \,dx\right| = \left|\frac{3}{2}x^2 + 6x\,\Big|_{0}^{3}\right| = \left|\left(\frac{3}{2}3^2 + 6 * 3\right) - \left(\frac{3}{2}0^2 + 6 * 0\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{27}{2} + 18\right) - 0\right| = \frac{63}{2}$$

Aufgabe 13

Berechne die Fläche zwischen den Funktionen

a) $x^2 - 9 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1$

$$\left|\int_{-1}^{1} x^2 - 17\,dx\right| = \left|\frac{1}{3}x^3 - 17x\,\Big|_{-1}^{1}\right| = \left|\left(\frac{1}{3} - 17\right) - \left(-\frac{1}{3} + 17\right)\right|$$

$$= \left|-\frac{50}{3} - \frac{50}{3}\right| = \frac{100}{3}$$

b) $x^2 + x = x + 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 2$

$$\left|\int_{-2}^{2} x^2 - 4\,dx\right| = \left|\frac{1}{3}x^3 - 4x\,\Big|_{-2}^{2}\right| = \left|\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right)\right|$$

$$\left|-\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

c) $2x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 14 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad \vee \quad x = 3$

$$\left|\int_{-3}^{3} x^2 - 9\, dx\right| = \left|\frac{1}{3}x^3 - 9x\ |_{-3}^{3}\right| = |(9-27)-(-9+27)|$$

$$= |-18-18| = 36$$