Basistext – Logik

Binäre Logik

Aussage

Das zentrale Element der binären Logik sind Aussagen. Aussagen sind Sätze oder Formeln, die entweder wahr oder falsch sind. Dabei kommt es nicht unbedingt darauf an, dass der Wahrheitsgehalt überprüfbar ist.

Beispiele:

(1) 11 ist eine Primzahl.
(2) Die Donau ist ein Berg.
(3) Auf dem Mond gibt es aktuell 5623 Krater mit einem Durchmesser größer als 100 Meter.

Die Aussage (1) ist wahr. Die Aussage (2) ist falsch. Satz (3) ist entweder wahr oder falsch, auch wenn wir das nicht leicht überprüfen können. Der Satz ist also auch eine Aussage.

Aussageform

Einer Aussageform ist kein Wahrheitsgehalt zugeordnet.

Beispiele:

(1) Wo bist du?
(2) Lerne fleißig!
(3) Das Bauwerk ist imposant.

Hat eine Aussageform eine Variable, so ist es oft möglich durch Einsetzen von Werte für die Variable Aussagen zu erhalten.

Beispiel:

X soll aus der Grundmenge {1;2;…;10} sein.

Aussageform: X ist eine Primzahl.

Durch Einsetzen der Elemente der Grundmenge erhält man 10 verschiedene Aussagen. Setzt man für x 2, 3, 5 oder 7 ein sind die Aussagen wahr. In den anderen Fällen sind die Aussagen falsch.

Negation

Wenn eine Aussage nicht gelten soll liegt eine Negation vor.

Man schreibt: „$\neg A$" (sprich: „nicht A")

A	$\neg A$
Wahr	falsch
Falsch	wahr

Folgerung

Kann man aus einer gegebenen Aussage A zwingend eine Aussage B ableiten liegt eine Folgerung vor.

Man schreibt: $A \Rightarrow B$ (gesprochen: „Aus A folgt B").

Dabei ist A die Prämisse und B die Konklusion.

Beispiel:

Aussage A: $x = 2$

Aussage B: $x^2 = 4$

Immer wenn $x = 2$ ist dann gilt auch $x^2 = 4$. Es gilt also: $A \Rightarrow B$.

Es gilt jedoch nicht: $B \Rightarrow A$. Denn wenn $x^2 = 4$ ist, kann x nicht nur 2 sondern auch -2 sein.

Wichtige Fehlerquelle: Wenn B gilt heißt es weder dass A wahr noch dass A falsch ist. Man kann über A einfach nichts aussagen.

Wenn jedoch B nicht wahr ist, dann kann man sicher sagen, dass A auch nicht wahr sein kann!

Äquivalenz

Liegen zwei Aussagen vor, die einander entsprechen, so spricht man von Äquivalenz.

Beispiel:

Aussage A: Es ist 10 Uhr.

Aussage B: In zwei Stunden ist es 12 Uhr.

Hier sind entweder beide Aussagen wahr oder falsch. Es kann nicht vorkommen, dass nur eine der Aussagen wahr ist. Man sagt: „A ist äquivalent zu B.“. Man schreibt: $A \Leftrightarrow B$.

Eine Äquivalenz ist eine Folgerung in beide Richtungen.

Und-Funktion

Aussagen können durch eine Und-Funktion miteinander verknüpft werden.

Man schreibt: „$A \wedge B$“ (sprich: „A und B“).

$A \wedge B$ wird wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

A	B	$A \wedge B$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

Oder-Funktion

Aussagen können durch eine Oder-Funktion miteinander verknüpft werden.

Man schreibt: „$A \vee B$“ (sprich: „A oder B“).

$A \vee B$ wird wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist.

A	B	$A \vee B$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Exklusiv-Oder-Funktion

Aussagen können durch eine Exklusiv-Oder-Funktion miteinander verknüpft werden.

Man schreibt: „$A\ XOR\ B$“ (sprich: „A exklusiv oder B“ bzw. „entweder A oder B“).

$A\ XOR\ B$ wird wahr, wenn genau eine der Aussagen A oder B wahr ist. Deshalb wird das Exklusiv-oder auch als „entweder oder“ bezeichnet.

A	B	$A\ XOR\ B$
wahr	wahr	falsch
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Fuzzy-Logik

Bei der Fuzzy-Logik (unscharfe Logik) hat eine Aussage keinen eindeutigen Wahrheitsgehalt. Vielmehr wird jeder Aussage eine Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen der Aussage zugeordnet.

Beispiel:

Mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit werde ich die Klassenarbeit bestehen.

Die Fuzzy-Logik wird in einigen technischen Anwendungen verwendet. Sie spielt in der Schulmathematik jedoch keine Rolle. Deshalb soll hier nicht näher auf sie eingegangen werden.