Wie liegen die Ebenen zu einander?

a)

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

r = -1 + t

s = 1 + t + u => in Gleichung 3 einsetzen

1 + (1 + t + u) = 2 + 2t + 3u => 2u + t = 0 => t = -2u

⇨ in F einsetzen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dieses ist die Schnittgerade der Ebenen.

b)

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.te Gleichung: r = 1 + u => in Gleichung 1 einsetzen:

1 + (1 + u) + 2s = 1 + 3t => s = -1/2 – u/2 + 3t/2 in Gleichung 3 einsetzen:

1 + 2r + s = 3 + 2t + u   =>   1 + 2(1 + u) + (-1/2 – u/2 + 3t/2) = 3 + 2t + u

⇨ u/2 = t/2 + ½   =>   u = t + 1

in F einsetzen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (t+1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dieses ist die Schnittgerade der Ebenen.

c)

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1 + r + 2s = 4 + 4t + 2u   =>   r = 3 – 2s + 4t + 2u   => in Gleichung 2

3(3 - 2s + 4t + 2u) = 3 + 6u   =>   -6s = -6 - 12t   => s = 1 + 2t

⇨ beides in Gleichung 3

1 + 2(3 – 2s + 4t + 2u) + s = 4 + 2t + 4u   =>   -3s + 6t + 3 = 0

⇨ -3(1 + 2t) + 6t + 3 = 0   =>   0 = 0

Es gibt unendlich viele Lösungen. Damit sind die Ebenen identisch.