Wie liegt die Gerade im Verhältnis zur Ebene?

a)

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t = 1 + r   => in 2.te Gleichung einsetzen:

2 + 3(1 + r) = r + 2s   =>   r = -5/2 + s   =>   t = -3/2 + s

Beides in Gleichung 3 einsetzen:

2 + 3/2 – s = 2 – 5/2 + s + s   =>   3s = 4   =>   s = 4/3

⇨ t = -1/6 und r = -7/6

Es liegt ein Schnittpunkt vor. Durch einsetzen erhält man:

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 3/2 \\ 13/6 \end{pmatrix}$$

b)

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

t = 1 + r => in 2.te Gleichung einsetzen

1 + 2(1 + r) = 2s => s = r + 3/2 => beides in Gleichung 3 einsetzen

2 + 4(1 + r) = r + 3(r + 3/2) => 6 = 9/2 => Widerspruch

Da die Gerade und die Ebene keine Punkte gemeinsam haben, müssen sie parallel sein.

c)

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3 + 2t = 1 + r + s => r = 2t – s + 2 => in 2.te und dritte Gleichung einsetzen

6 + 4t = 2 + 2(2t – s +2) + 2s => 6 = 6

4 + 4t = (2t – s + 2) + 3s => 2t = 2s -2 => t = s - 1

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Daraus folgt: Die Gerade liegt in der Ebene.