Führe für die Funktionen komplette Kurvendiskussion durch

$f(x) = x^3 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

Definitionsbereich:

D(f) = R

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

f(0) = 0 => f schneidet die y-Achse in (0;0)

$x^3 - x = 0$ => $x(x^2 - 1) = 0$ => $x_1 = 0 \wedge x_2 = 1 \wedge x_3 = -1$

- ⇨ Die Funktion hat an den Stellen -1, 0 und 1 Nullstellen.

Symmetrien:

$f(x) = x^3 - x = -\left((-x)^3 - (-x)\right) = -f(-x)$

Die Funktion ist punktsymmetrisch am Ursprung.

Monotonie:

$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ => $x^2 > \frac{1}{3}$ => $x > \sqrt{\frac{1}{3}} \vee x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$

Für diese Bereiche ist f streng monoton steigend.

$f'(x) = 3x^2 - 1 < 0$ => $x^2 < \frac{1}{3}$ => $-\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}$

Für diesen Bereich ist f streng monoton fallend.

Krümmung:

$f''(x) = 6x \geq 0$ => x ≥ 0 => In diesem Bereich ist f linksgekrümmt.

$f''(x) = 6x \leq 0$ => x ≤ 0 => In diesem Bereich ist f rechtsgekrümmt.

Extrema:

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$

- ⇨ $x^2 = \frac{1}{3}$
- ⇨ $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \wedge \quad x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$f''(x) = 6x$

$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{1}{3}} < 0$ => Es liegt ein Maximum vor.

$f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 6\sqrt{\frac{1}{3}} > 0$ => Es liegt ein Minimum vor.

Wendestellen:

$f''(x) = 6x = 0$ => x = 0

f‘‘‘(x) = 6

f‘‘‘(0) = 6 ≠ 0 => f hat an der Stelle 0 eine Wendestelle.

Verhalten im Unendlichen:

$\lim_{x \to \infty}(f(x)) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty}(f(x)) = -\infty$

Polstellen:

Es existieren keine Polstellen.

$f(x) = 3xe^x$

$f'(x) = 3e^x + 3xe^x = 3(1+x)e^x$

$f''(x) = 3e^x + 3(1+x)e^x = 3(2+x)e^x$

$f'''(x) = 3e^x + 3(2+x)e^x = 3(3+x)e^x$

Definitionsbereich:

D(f) = R

Schnittpunkte mit den Achsen:

f(0) = 0 => f geht durch den Ursprung

$f(x) = 3xe^x = 0$ => x = 0

- ⇨ f hat keine weiteren Nullstellen.

Symmetrien:

f(x) ≠ f(-x)

f(x) ≠ - f(-x)

Es liegt keine Symmetrie vor.

Monotonie:

$f'(x) = 3(1+x)e^x > 0$ => 1 + x > 0 => x > -1

Für x > -1 ist f streng monoton steigend.

$f'(x) = 3(1+x)e^x < 0$ => 1 + x < 0 => x < -1

Für x < -1 ist f streng monoton fallend.

Krümmung:

$f''(x) = 3(2+x)e^x \geq 0$ => $(2+x) \geq 0$ => $x \geq -2$

In diesem Bereich ist f linksgekrümmt.

$f''(x) = 3(2+x)e^x \leq 0$ => $(2+x) \leq 0$ => $x \leq -2$

In diesem Bereich ist f rechtsgekrümmt.

Extrema:

$f'(x) = 3(1+x)e^x = 0$ => 1 + x = 0 => x = -1

$f''(x) = 3(2+x)e^x$

$f''(-1) = 3e^{-1} > 0$

An der Stelle -1 hat f ein Minimum.

Wendestellen:

$f''(x) = 3(2+x)e^x = 0$ => (2 + x) = 0 => x = -2

$f'''(x) = 3(3+x)e^x$

$f'''(-2) = 3e^{-2} > 0$

An der Stelle -2 hat f eine Wendestelle.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x)\right) = 0$$

Polstellen:

f hat keine Polstellen.

$$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x-4)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+10}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+10)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2(x-2)^2-2(x^2-4x+10)}{(x-2)^3} = \frac{-12}{(x-2)^3} =$$
$$-12(x-2)^{-3}$$

$$f'''(x) = -12[-3(x-2)^{-4}] = 36(x-2)^{-4}$$

Definitionsbereich:

D(f) = R \ {2}

Schnittpunkte mit den Achsen:

f(0) = 2

f schneidet die y-Achse im Punkt (0;2).

$$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-2} = 0$$

- ⇨ $x^2 - 3x - 4 = 0$
- ⇨ (x - 4) (x + 1) = 0
- ⇨ $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$

f hat an den Stellen -1 und 4 Nullstellen.

Symmetrien:

f(x) ≠ f(-x)

f(x) ≠ - f(-x)

Es liegt keine Symmetrie vor.

Monotonie:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 10}{(x-2)^2} > 0$$

⇨ $x^2 - 4x + 10 > 0$

Für $x^2 - 4x + 10 = 0$ gilt:

p = -4 q = 10

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 10} = 2 \pm \sqrt{-6}$ Wiederspruch

⇨ Damit ist $x^2 - 4x + 10 > 0$ für alle x gültig.

Die Funktion f ist streng monoton wachsend.

Krümmung:

$$f''(x) = \frac{-12}{(x-2)^3} \geq 0$$

$\Rightarrow (x-2)^3 < 0$

$\Rightarrow x - 2 < 0$

$\Rightarrow x < 2$

Für den Bereich x < 2 ist f linksgekrümmt.

Für x > 2 ist f rechtsgekrümmt.

Extrema:

f'(x) = 0 ist für kein x erfüllt. (siehe Monotonie)

Damit hat f kein Extremum.

Wendestellen:

$$f''(x) = \frac{-12}{(x-2)^3} = 0$$

- ⇨ Nicht möglich

f hat keine Wendestelle.

Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x)\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x)\right) = -\infty$$

Polstellen:

$$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-2} = \frac{(x-4)(x+1)}{x-2}$$

- ⇨ f hat an der Stelle 2 eine Polstelle.