1) Auf einer Wiese soll ein Rechteck mit 500 m^2 Flächeninhalt als Weide für Tiere mit einem Zaun begrenzt werden. Wie sind die Kantenlängen des Rechteckes, wenn der Materialverbrauch möglichst gering gehalten werden soll?

Die Nebenbedingung bezieht sich auf die Fläche:

$$a * b = F \quad \Rightarrow \quad b = \frac{F}{a}$$

Der Umfang soll minimal werden:

$$f(a;b) = 2a + 2b$$

Durch einsetzten der Nebenbedingung erhält man:

$$\Rightarrow \quad f(a) = \ 2a + 2\frac{F}{a}$$

$$f'(a) = 2 - \frac{2F}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \ a^2 = \frac{2F}{2} = F$$

$$\Rightarrow \ a = \sqrt{F} \quad \Rightarrow b = \sqrt{F}$$

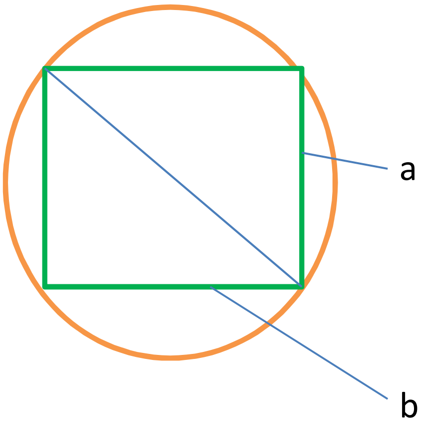
$$f''(a) = \frac{4F}{a^3}$$

$$f''\left(\sqrt{F}\right) = \frac{4F}{(\sqrt{F}\,)^3} > 0$$

Man erhält ein Quadrat mit der Kantenlänge $\sqrt{F}$.

Bemerkung: Das Ergebnis ist unabhängig vom Wert für die Fläche.

2) Wie lang sind die Kantenlängen eines Rechteckes in einem Kreis mit einem Radius von 10 cm, wenn der Flächeninhalt des Rechteckes maximal sein soll?



Als Nebenbedingung benutzt man den Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = (2r)^2$$

$$\Rightarrow \; a^2 = 4r^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

$$f(a; b) = a * b$$

Durch einsetzen der Nebenbedingung erhält man:

$$f(b) = b * \sqrt{4r^2 - b^2}$$

$$f'(b) = \sqrt{4r^2 - b^2} + b * (-2b) * \frac{1}{2\sqrt{4r^2 - b^2}} = \sqrt{4r^2 - b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}}$$

$$= \frac{4r^2 - b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} - \frac{b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 4r^2 - 2b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2r^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{2} * r$$

$$f''(b) = \frac{-4b\sqrt{4r^2 - b^2} - (4r^2 - 2b^2)(-2b)\frac{1}{2}(4r^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}}{4r^2 - b^2}$$

$$= \frac{-4b\sqrt{4r^2-b^2}+(4r^2-2b^2)b(4r^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}}{4r^2-b^2}$$

$$f''(\sqrt{2}*r) = \frac{-4\sqrt{2}r\sqrt{2}r+0}{2r^2} = \frac{-8r^2}{2r^2} = -4 < 0$$

$\sqrt{2}*r$ ist ein Maximum.

Durch erneutes einsetzen in die Nebenbedingung erhält man:

$$a = \sqrt{4r^2-b^2} = \sqrt{4r^2-(\sqrt{2}*r)^2} = \sqrt{4r^2-2r^2} = \sqrt{2}*r$$

Es handelt sich um ein Quadrat mit der Kantenlänge $\sqrt{2}*r$.

Bemerkung: Das Ergebnis ist unabhängig vom Wert von r.

3) Gegeben ist eine Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 3$.
   Welcher Punkt von f liegt am nächsten zum Ursprung?

Die Abstandsfunktion ist: $d(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Mit der Nebenbedingung: $y = x^2 - 3x + 3$

Durch einsetzen erhält man:

$$d(x) = \sqrt{x^2+(x^2-3x+3)^2} = \sqrt{x^4-6x^3+16x^2-18x+9}$$

$$d'(x) = (4x^3-18x^2+32x-18)\frac{1}{2}(x^4-6x^3+16x^2-18x+9)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2x^3 - 9x^2 + 16x - 9}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^3 - 9x^2 + 16x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \; (x-1)(2x^2 - 7x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \wedge \quad x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{9}{2} = 0$$

$$p = -\frac{7}{2} \qquad q = \frac{9}{2}$$

$x_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{2}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{72}{16}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{-23}{16}}$ Widerspruch

$$d''(x) = \frac{(6x^2 - 18x + 16)(x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9)^{\frac{1}{2}} - (2x^3 - 9x^2 + 16x - 9)(\ldots)}{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9}$$

$$d''(1) = \frac{(6 - 18 + 16)(1 - 6 + 16 - 18 + 9)^{\frac{1}{2}} - 0}{1 - 6 + 16 - 18 + 9} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 0$$

$$y = x^2 - 3x + 3 = 1^2 - 3 * 1 + 3 = 1$$

Der Punkt $(1;1)$ ist dem Ursprung am nächsten.