Führe für die Funktionen komplette Kurvendiskussion durch

$f(x) = ax^3 - 2$

$f'(x) = 3ax^2$

$f''^{(x)} = 6ax$

$f'''(x) = 6\text{a}$

Definitionsbereich:

D(f) = R

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

f(0) = -2 => f schneidet die y-Achse in (0;-2)

$ax^3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x^3 = \frac{2}{a}$ für $a \neq 0$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{a}}$

- ⇨ Die Funktion hat an dieser Stelle eine Nullstelle, wenn a nicht 0 ist.

Symmetrien:

$f(1) = a1^3 - 2 = a - 2$

$-f(-1) = -(a(-1)^3 - 2) = a + 2$

$f(-1) = (a(-1)^3 - 2) = -a - 2$

Die Funktion ist weder punktsymmetrisch am Ursprung noch spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

Monotonie:

$f'(x) = 3ax^2 \geq 0$ => $a > 0$

Für $a > 0$ ist f monoton steigend.

$f'(x) = 3ax^2 \leq 0$ => $a < 0$

Für $a < 0$ ist f monoton fallend.

Krümmung:

$f''(x) = 6ax \geq 0$ => $(x \geq 0 \ \wedge a \geq 0) \vee (x \leq 0 \ \wedge a \leq 0)$

Unter diesen Voraussetzungen ist f linksgekrümmt.

$f''(x) = 6ax \leq 0$ => $(x \geq 0 \ \wedge a \leq 0) \vee (x \leq 0 \ \wedge a \geq 0)$

Unter diesen Voraussetzungen ist f rechtsgekrümmt.

Extrema:

1.Fall: a ≠ 0

$f'(x) = 3ax^2 = 0$

⇨ $x = 0$

$f''(0) = 6a0 = 0$

$f'''(0) = 6a$

Es liegt ein Sattelpunkt vor.

2.Fall: a = 0

$f(x) = -2$

Es ist leicht ersichtlich, dass kein Extremum vorliegt.

Wendestellen:

1.Fall: a ≠ 0

f hat an der Stelle 0 ein Sattelpunkt (siehe Extrema).

2.Fall: a = 0

$f(x) = -2$

Es ist leicht ersichtlich, dass keine Wendestelle vorliegt.

Verhalten im Unendlichen:

1.Fall: a > 0

$\lim_{x \to \infty}(f(x)) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty}(f(x)) = -\infty$

2.Fall: a < 0

$\lim_{x \to \infty}(f(x)) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty}(f(x)) = \infty$

3.Fall: a = 0

$$\lim_{x \to \infty}(f(x)) = -2$$

$$\lim_{x \to -\infty}(f(x)) = -2$$

Polstellen:

Es existieren keine Polstellen.

$f(x) = e^{3ax} - 1$

$f'(x) = 3ae^{3ax}$

$f''(x) = 9a^2e^{3ax}$

$f'''(x) = 27a^3e^{3ax}$

Definitionsbereich:

D(f) = R

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

f(0) = $e^{3a0} - 1 = 1 - 1 = 0$ => f schneidet die y-Achse in (0;0)

$e^{3ax} - 1 = 0 \quad \Rightarrow\ 3ax = 0$

$\Rightarrow x = 0 \ \vee\ a = 0$

- ⇨ Die Funktion ist konstant 0, wenn a = 0. Ist a ≠ 0 hat f am Ursprung eine Nullstelle.

Symmetrien:

$f(x) = e^{3ax} - 1 = f(-x) \quad für\ a = 0$

$f(x) = e^{3ax} - 1 = -f(-x) \quad für\ a = 0$

Die Funktion ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse und punktsymmetrisch am Ursprung für a = 0.

Monotonie:

$f'(x) = 3ae^{3ax} > 0$

$e^{3ax} > 0 \quad \Rightarrow \quad 3a > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0$

Für $a > 0$ ist f streng monoton steigend.

$f'(x) = 3ax^2 < 0$ => $a < 0$

$e^{3ax} > 0 \quad \Rightarrow \quad 3a < 0 \quad \Rightarrow \quad a < 0$

Für $a < 0$ ist f streng monoton fallend.

Für a = 0 ist f konstant.

Krümmung:

$f''(x) = 9a^2e^{3ax} \geq 0$

$9a^2 \geq 0$ und $e^{3ax} \geq 0$

f ist linksgekrümmt.

Extrema:

$f'(x) = 3ae^{3ax} = 0$

$\Rightarrow \quad 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Für a = 0 ist f konstant. Dieser Fall muss also nicht weiter untersucht werden. Weitere Extrema gibt es nicht.

Wendestellen:

$f''(x) = 9a^2 e^{3ax} = 0$

$\Rightarrow \quad 9a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Für a = 0 ist f konstant. Dieser Fall muss also nicht weiter untersucht werden. Weitere Wendestellen gibt es nicht.

Verhalten im Unendlichen:

$f(x) = e^{3ax} - 1$

$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = \infty$ für a > 0

$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = -1$ für a < 0

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = -1$ für a > 0

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = \infty$ für a < 0

Polstellen:

Es existieren keine Polstellen.

$f(x) = \sin(2ax)$

$f'(x) = 2a\cos(2ax)$

$f''(x) = -4a^2\sin(2ax)$

$f'''(x) = -8a^3\cos(2ax)$

Definitionsbereich:

D(f) = R

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

f(0) = $\sin(0) = 0$ => f schneidet die y-Achse am Ursprung

$\sin(2ax) = 0$ $\Rightarrow\ 2ax = z * \pi \qquad z \in Z$

$\Rightarrow x = \frac{z}{2a} * \pi \qquad für\ a \neq 0$

- ⇨ Die Funktion ist konstant 0, wenn a = 0. Ist a ≠ 0 hat f die Nullstellen $\frac{z}{2a} * \pi$ für alle $n \in Z$.

Symmetrien:

Man ersetzt 2ax durch z:

sin(z) ist punktsymmetrisch am Ursprung

Monotonie:

$f(x) = \sin(2ax)$

Für $a \neq 0$:

f(x) ist monoton steigend für $\left[\frac{-\pi+2z\pi}{4a}\ ;\ \frac{\pi+2z\pi}{4a}\right]$ $\ f\ddot{u}r\ z \in Z$

f(x) ist monoton fallend für $\left[\frac{\pi+2z\pi}{4a}\ ;\ \frac{3\pi+2z\pi}{4a}\right]$ $\ f\ddot{u}r\ z \in Z$

Krümmung:

$f(x) = \sin(2ax)$

Für $a \neq 0$:

f(x) ist rechtsgekrümmt für $\left[\frac{2z\pi}{2a}\ ;\ \frac{\pi+2z\pi}{2a}\right]$ $\ f\ddot{u}r\ z \in Z$

f(x) ist linksgekrümmt für $\left[\frac{\pi+2z\pi}{2a}\ ;\ \frac{2z\pi}{2a}\right]$ $\ f\ddot{u}r\ z \in Z$

Extrema:

$f'(x) = 2\text{a}\cos(2ax) = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad \cos(2ax) = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad 2\text{ax} = \frac{z*\pi}{2} \qquad f\ddot{u}r\ z \in Z$

$\Rightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad \text{x} = \frac{z*\pi}{4a} \qquad f\ddot{u}r\ z \in Z\ und\ a \neq 0$

Für a = 0 ist f konstant. Dieser Fall muss nicht weiter untersucht werden.

$f''\left(\frac{z*\pi}{4a}\right) = -4a^2\sin\left(2a\frac{z*\pi}{4a}\right) = -4a^2\sin\left(\frac{z*\pi}{2}\right) \neq 0$

f(x) hat an den Stellen $\frac{z*\pi}{4a}$ für alle $z \in Z$ Extrema.

Wendestellen:

$f''(x) = -4a^2\sin(2ax) = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad sin(2ax) = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad 2ax = z*\pi \quad f\ddot{u}r\ z \in Z$

$$\Rightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad x = \frac{z * \pi}{2a} \quad f\text{ür } z \in Z$$

Für a = 0 ist f konstant. Dieser Fall muss also nicht weiter untersucht werden.

$$f'''\left(\frac{z * \pi}{2a}\right) = -8a^3 \cos\left(2a\frac{z * \pi}{2a}\right) = -8a^3 \cos(z * \pi) \neq 0$$

f(x) hat an den Stellen $\frac{z*\pi}{2a}$ $f\text{ür } z \in Z$ Wendestellen.

Verhalten im Unendlichen:

Für a=0 ist f(x) konstant.

Ist a ungleich 0, so liegen die Funktionswerte zwischen 1 und -1. Die Funktion ist nicht konvergent.

Polstellen:

Es existieren keine Polstellen.