1) Ein Burggraben hat die Form einer Parabel. Er ist 6 Meter tief, 4 Meter breit und 20 Meter lang. Wie viel m^3 Wasser passt in den Graben?

Das Volumen ist die Länge des Grabens multipliziert mit seinem Querschnitt. Zur Berechnung des Querschnittes legt man ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Mitte des Grabens am oberen Rand an.
Die allgemeine Form einer Parabel ist: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Es gilt für den tiefsten Punkt: f(0) = -6 => c = -6

Die Nullstellen der Parabel befinden sich bei -2 und 2.

$$f(2) = a * 2^2 + b * 2 - 6 = 0 \qquad => b = 3 - 2a$$
$$f(-2) = a * (-2)^2 + b * (-2) - 6 = 4a - 2b - 6 = 0$$
$$=> \; b = 2a - 3$$

Da beides erfüllt sein muss gilt:

$$3 - 2a = 2a - 3 \qquad => 4a = 6 \qquad => a = \frac{3}{2}$$

In eine der oberen Gleichungen einsetzen:

$$b = 3 - 2a = 3 - 2 * \frac{3}{2} = 0$$

Die Parabel lautet also:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6$$

Für den Querschnitt ergibt sich damit:

$$\int_{-2}^{2} \frac{3}{2}x^2 - 6 \, dx = \frac{1}{2}x^3 - 6x \Big|_{-2}^{2}$$
$$= \left(\frac{1}{2}2^3 - 6 * 2\right) - \left(\frac{1}{2}(-2)^3 - 6 * (-2)\right)$$
$$= (4 - 12) - (-4 + 12) = -8 - 8 = -16$$

Die Fläche ist natürlich positiv. Es bleibt noch:
V = $16m^2$ * 20 m = 320 m^3

2) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ und $g(x) = -x^2 - 2x + 8$. Bestimme die Fläche, die von den Funktionen eingeschlossen wird.

Es werden die Schnittpunkte bestimmt:

$3x^2 - 2x + 4 = -x^2 - 2x + 8$

$=> 4x^2 = 4$

$=> x = 1 \quad \vee \quad x = -1$

$$\int_{-1}^{1} g(x) - f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} -4x^2 + 4dx = -\frac{4}{3}x^3 + 4x \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{4}{3} + 4\right) - \left(\frac{4}{3} - 4\right) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

3) Ein Wasserbecken ist zu Beginn leer. 5 Sekunden lang fließt Wasser über einen Zulauf in das Becken. Die Menge ist dabei linear ansteigend bis 5 Liter/Sekunde. Anschließend läuft das Wasser 10 weitere Sekunden mit maximaler Menge in das Becken. Nachdem der Zulauf abrupt gestoppt wurde wird ein Abfluss geöffnet. Das Wasser fließt mit 3 Liter/Sekunde konstant für 15 Sekunden ab. Wie viel Wasser befindet sich am Schluss im Becken?

Die einzelnen Abschnitte werden integriert und addiert:

$$\int_0^5 x\,dx + \int_0^{10} 5\,dx - \int_0^{15} 3\,dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^5 + 5x|_0^{10} - 3x|_0^{15}$$

$$= \frac{25}{2} + 50 - 45 = \frac{35}{2}$$

Es sind noch 17,5 Liter im Becken.

4) Bestimme eine zur x-Achse parallele Gerade g(x), die mit der Funktion $f(x) = x^2$ eine Fläche mit dem Flächeninhalt 4 einschließt.

Es sei $g(x) = a$

Die Schnittpunkte werden durch Gleichsetzen bestimmt:
$x^2 = a$
$=> \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

Da die Funktionen symmetrisch zu y-Achse sind, betrachten wir nur den x-Bereich größer Null und verdoppeln ihn:

$$2\int_0^{\sqrt{a}} a - x^2\, dx = 2 * \left(ax - \frac{1}{3}x^3 \Big|\begin{matrix}\sqrt{a} \\ 0\end{matrix} \right) = 2 * \left(a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} = 4 \quad => \quad a^{\frac{3}{2}} = 3 \quad => \quad a = \sqrt[3]{9}$$

$g(x) = \sqrt[3]{9}$