Basistext – Gleichungen / Ungleichungen

Gleichungen

Das Gleichheitszeichen verbindet zwei Terme. Es bedeutet, dass der Wert des ersten Terms dem des zweiten Terms entspricht. Man kann eine Gleichung als eine Art Balkenwaage ansehen, wobei das Gleichheitszeichen der Aufhängung entspricht. Wenn man nun auf der einen Seite eine Operation durchführt, muss man die gleiche Operation auf der anderen Seite auch durchführen, um die Waage wieder in das Gleichgewicht zu bringen. Es handelt sich dabei um eine sogenannte Äquivalenzumformung (Symbol: ⇔). Durch geschicktes äquivalentes Umformen, kann man den Wert einer unbekannten Variablen ermitteln.

Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
 & 3x + 5 = 7 - 2x & \\
\Leftrightarrow & 5x + 5 = 7 & \mid +2x \\
\Leftrightarrow & 5x \quad = 2 & \mid -5 \\
\Leftrightarrow & x \quad = 2/5 & \mid :5
\end{array}
$$

Die Lösungsmenge enthält alle Werte, die in der Gleichung eingesetzt eine wahre Aussage ergeben. In diesem Beispiel ist die Lösungsmenge L:

$$L = \left\{\frac{2}{5}\right\}$$

Quadratische Gleichungen

Jede quadratische Gleichung kann in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ geschrieben werden. Für $a \neq 0$ gilt also:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Man ersetzt die allgemeinen Brüche durch neue Variablen und erhält:

$$x^2 + px + q = 0$$

Das ist die Ausgangsgleichung für die sogenannte pq-Formel.

Es gibt zwei Lösungen für diese Gleichung:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Manchmal kann man die Lösungen einer quadratischen Gleichung auch durch geeignetes Faktorisieren ermitteln. Gesucht werden zwei Zahlen x_1 und x_2 für die gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Es muss also gelten:

$x_1 * x_2 = q$ und

$x_1 + x_2 = -p$

Beispiel:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Denn (-2) * (-3) = 6 und (-3) + (-2) = -5

Damit erhält man: L = { 2 ; 3 }

Eine weitere Möglichkeit eine quadratische Gleichung zu lösen ist die sogenannte quadratische Ergänzung. Diese soll an einem Beispiel erläutert werden:

$2x^2 - 8x - 24 = 0$

Zunächst muss wieder der Faktor vor x^2 verschwinden. Man teilt also durch 2.

$x^2 - 4x - 12 = 0$

Nun wird „$x^2 - 4x$“ so ergänzt, dass die zweite Binomische Formel anwendbar wird.

$x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) - 16 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 - 16 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 16$

$\Rightarrow x - 2 = \sqrt{16} \quad \vee \quad x - 2 = -\sqrt{16}$

$\Rightarrow x = 6 \quad \vee \quad x = -2$

Ungleichungen

Ungleichungen werden im Prinzip genauso behandelt wie Gleichungen. Allerdings dreht sich das Rechenzeichen um, wenn bei äquivalenten Umformungen die gesamte Ungleichung mit einem negativen Wert multipliziert bzw. dividiert wird.

Beispiel:

$-x < 2$

$\Leftrightarrow \quad x > -2$

Besondere Vorsicht muss walten, wenn man mit einer unbestimmten Variablen multipliziert bzw. dividiert. Hier muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

Beispiel:

a*x < 5

1. Fall: a > 0

   $\Leftrightarrow x < \frac{5}{a}$

2. Fall: a < 0

   $\Leftrightarrow x > \frac{5}{a}$

3. Fall: a = 0

   0 < 5 allgemein gültig

Grundsätzlich erhält man als Lösungsmenge oft keine diskrete Werte sondern Wertebereiche.