Basistext – Funktionen

Definition

Eine Funktion f ordnet jedem Element x aus einer Definitionsmenge D_f genau ein Wert y zu.

Man schreibt: f: x -> y mit y = f(x)

Die Wertemenge einer Funktion f besteht aus allen Funktionswerten (y-Werte) von f.

Funktionenschar

Enthält eine Funktionsgleichung neben den üblichen Parametern x und y noch einen sogenannten Scharparameter a ist die Funktion nicht eindeutig.

Beispiel: $f(x) = ax + 1$

Je nach Wert für den Parameter a erhält man eine andere Funktion. Fasst man alle möglichen Funktionen zusammen erhält man eine Funktionenschar.

Lineare Funktionen / Geraden

Geraden haben die allgemeine Form:

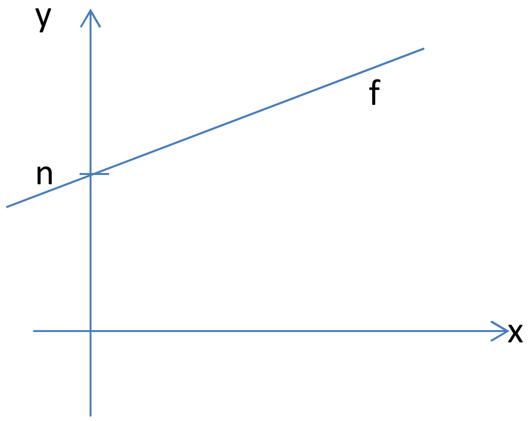
$f(x) = mx + n$

wobei die Variablen m und n in anderen Darstellungen auch durch a und b ersetzt werden.

Die Variable n legt fest inwieweit die Gerade nach oben oder nach unten verschoben ist. Setzt man x=0 so erhält man:

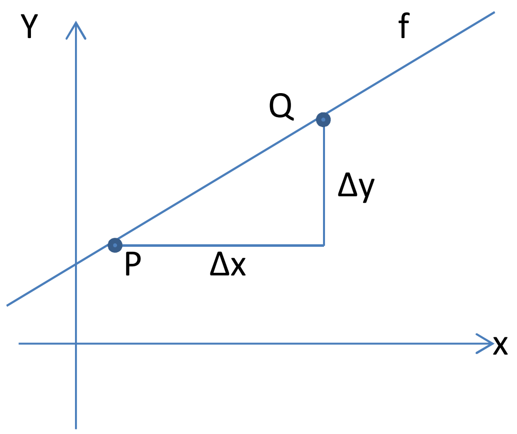
f(0) = n

Man erhält also mit dem Punkt (0,n) den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse.



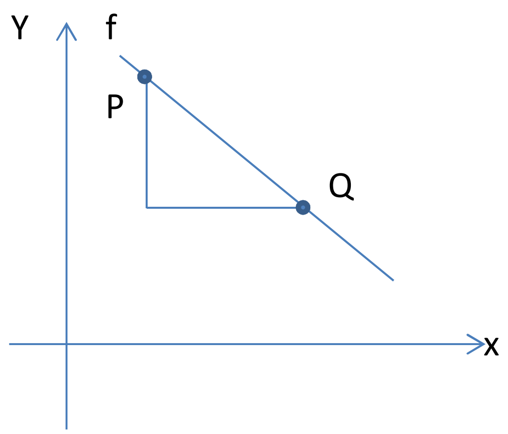
Deshalb nennt man n auch den „Achsenabschnitt".

Die Variable m gibt an wie steil eine Gerade ist. Man erhält m, wenn man zu zwei Punkten der Geraden die Differenz der y-Werte durch die Differenz der x-Werte teilt:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

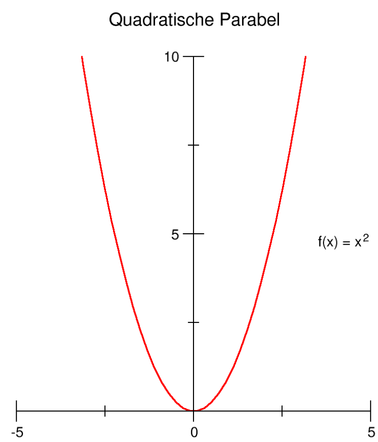
m nennt man deshalb auch die „Steigung“ von f. Eine negative Steigung bedeutet, es liegt eine fallende Gerade vor. Wenn $\Delta y < 0$ und $\Delta x > 0$ dann erhält man:



Parabeln

Eine Parabel ist eine Funktion 2.ter Ordnung. Parabeln haben die allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$. Diese Form heißt Normalform.

Die einfachste Parabel ist die sogenannte Normalparabel $f(x) = x^2$



(Autor: Markus Schweiß / freie Wiki-Lizenz)

Die Spitze einer Parabel nennt man „Scheitelpunkt“.

Der Parameter a bestimmt die Streckung und Stauchung der Normalparabel:

$a > 1$: Die Parabel wird steiler bzw. enger mit wachsendem a

$a = 1$: Normalparabel

$0 < a < 1$: Die Parabel ist flacher als die Normalparabel

Ein negatives a führt zu einer Spiegelung der Parabel an der x-Achse. Die Parabel ist also nach unten geöffnet.

Der Summand c führt zu einer Verschiebung der gesamten Parabel nach oben (positives c) oder nach unten (negatives c).

Der Einfluss des Parameters b führt zu weiteren Verschiebungen. Allgemein berechnet sich der Scheitelpunkt S nach der Formel:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

Hat man die Form $y = (x + n)^2$ wird die Parabel nach rechts ($n < 0$) oder nach links ($n > 0$) verschoben.

Die Form $f(x) = (x - d)^2 + e$ nennt man Scheitelpunktform. Der Scheitelpunkt lässt sich direkt ablesen: S (d;e).

Das Umwandeln einer Scheitelpunktform in eine Normalform geschieht einfach durch Anwenden der entsprechenden Binomischen Formel und Zusammenfassen.

Beispiel: $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

$$= x^2 - 4x + 4 + 3$$

$$= x^2 - 4x + 7$$

Der umgekehrte Weg, also von Normalform zur Scheitelpunktform, wird durch quadratische Ergänzung erreicht.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x + 10$

$$= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 10$$

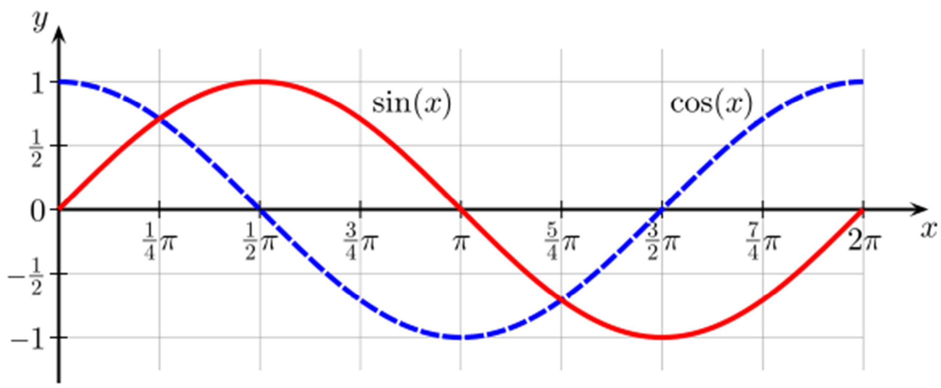
$$= (x - 2)^2 + 6$$

Sinus- und Cosinus-Funktion

Die Sinus- und Cosinus-Funktionen sind elementare mathematische Funktionen. Sie sind die Basis für Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck, der sogenannten Trigonometrie. Die Funktionen spielen eine bedeutende Rolle in den Naturwissenschaften bei der Beschreibung von Wellen jeder Art.

Sinus und Cosinus sind periodische Funktionen, das heißt nach einer gewissen Periode wiederholen sich die Funktionswerte. Die Angabe der x-Werte erfolgt entweder in Winkelmaß (Grad) oder in Bogenmaß. Dabei entsprechen 360° bzw. 2π einer Periode.

Die Funktionen haben folgendes Aussehen:



Nachfolgende Tabelle enthält wichtige Funktionswerte:

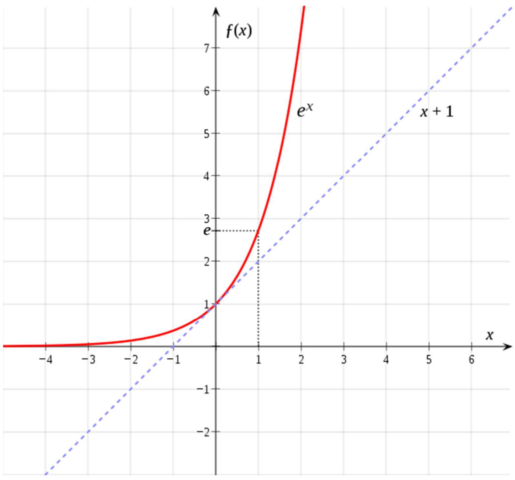
Grad	0	30	45	60	90	180	270	360
Bogenmaß	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
Sinus (x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2} * \sqrt{3}$	1	0	-1	0
Cosinus(x)	1	$\frac{1}{2} * \sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Die Umkehrfunktionen heißen Arkussinus und Arkuscosinus.

Exponential-Funktion

Eine Exponentialfunktion wird jede Funktion der Form x -> a^x bezeichne. In der Regel ist aber die Funktion x -> e^x gemeint. Üblich ist auch die Schreibweise: x-> exp(x). Mit e ist die Eulersche Zahl e=2,7183… gemeint.

Die Funktion f(x) = e^x hat folgendes Aussehen:



Autor: Marcel Marnitz, reworked by user:Georg-Johann

Lizenz: Public domain

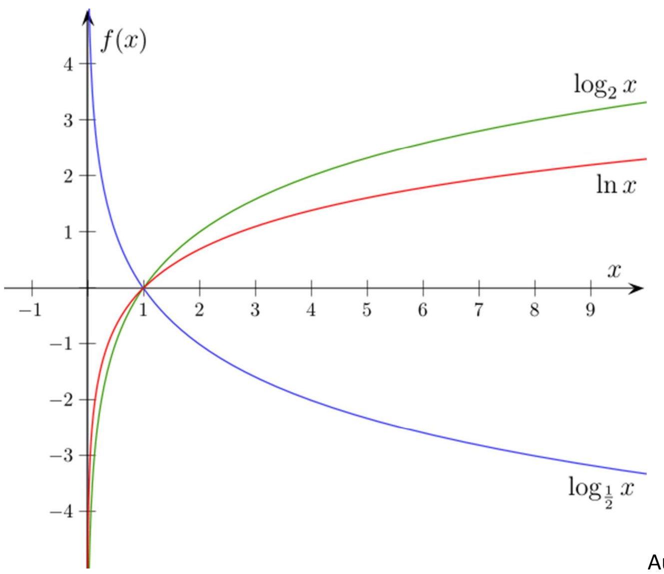
Auffällig ist, dass f keine negativen Werte besitzt. Für große x-Werte steigt f „über alle Maße“.

Große Bedeutung besitzt die e-Funktion in den Naturwissenschaften z.B. bei chemischen Reaktionen.

Logarithmus-Funktion

Logarithmen sind alle Lösungen für x der Gleichung $a = b^x$, wobei a und b vorgegeben sind. Die Lösung ist $x = \log_b a$. Man sagt: „x ist der Logarithmus von a bezüglich der Basis b“. Das Bilden des Logarithmus ist also die Umkehrung des Potenzierens.

Die Graphen der Logarithmen sehen in Abhängigkeit von den Basen unterschiedlich aus. Allen ist jedoch gemein dass sie an der Stelle x=1 die x-Achse schneiden und dass sie nur für positive x-Werte definiert sind.



Autor : Marcel Marnitz

Der Logarithmus wird oft in den Naturwissenschaften verwendet (z.B. pH-Wert).