Basistext – Cramersche Regel

Die Cramersche Regel ist eine Möglichkeit, lineare Gleichungssysteme zu lösen. In der Praxis müssen jedoch viele Determinanten berechnet werden, was Aufwand bedeutet. Deshalb wird die Cramersche Regel nur relativ selten angewendet.

<u>Voraussetzung:</u>

Es muss ein lineares Gleichungssystem mit genauso vielen Gleichungen, wie Unbekannten vorliegen.

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n$$

Die Koeffizienten der linken Seite werden als Matrix und die rechte Seite der Gleichungen als Vektor geschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

<u>Berechnung:</u>

Die Lösung des LGS ist:

$$L = \left[\frac{D_1}{D}\ ;\ \frac{D_2}{D}\ ;\ \dots\ ;\ \frac{D_n}{D}\right]$$

Dabei ist D die Determinante der Matrix A.

D_i ist ebenfalls die Determinante der Matrix A, wobei jedoch die i-te Spalte der Matrix durch den Vektor b ersetzt wurde.

<u>Beispiel:</u>

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$3x_1 \qquad - x_3 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 18 - 1 = 7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 6 = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 3 + 4 - 1 = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 1 = -1$$

$$L = \left[\frac{2}{7}\ ;\ 0\ ;\ \frac{-1}{7}\right]$$