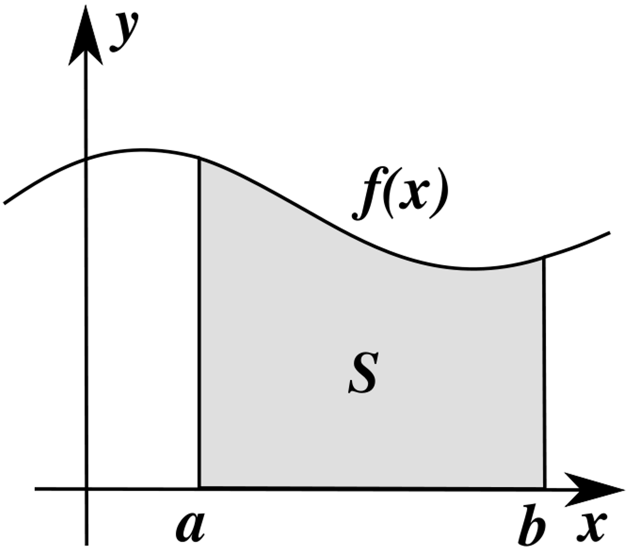
Basistext - Integralrechnung

Anschaulich ist das Integrieren eine Flächenberechnung. Wird eine Funktion f(x) integriert, so wird die Fläche zwischen der x-Achse und f(x) berechnet.

Geschieht dieses ohne Einschränkung der x-Werte spricht man von einem unbestimmten Integral. Es wird das Symbol „∫" benutzt. Den Abschluss des Integrals bildet „dx", um die Variable zu kennzeichnen, auf die sich die Integration bezieht. Die Integration von f(x) ist also: $\int f(x)\, dx$.

Wird, wie in der nachfolgenden Grafik, nur ein Teil der Funktion f(x) betrachtet, so spricht man von einem bestimmten Integral.



Hierbei sind a und b die Integrationsgrenzen. Diese Grenzen werden unten und oben an das Integralzeichen geschrieben: $\int_a^b f(x)\, dx$.

(Man spricht: „Das Integral von f(x) in den Grenzen von a und b.")

Stammfunktion

Rechnerisch ist das Integrieren die Umkehrung der Ableitung. Es wird also zu einer Funktion f(x) eine Funktion F(x) gesucht, wobei gilt: F'(x) = f(x).

F(x) wird Stammfunktion von f(x) genannt.

Beispiel:

$$f(x) = ax^n$$

$$F(x) = \frac{a}{(n+1)} x^{n+1} + c$$

Ohne die Konstante c würden alle Lösungen mit c ≠ 0 verloren gehen. Auch mit der Konstanten c gilt: F'(x) = f(x). Durch c existieren also unendlich viele Lösungen.

Flächenberechnung im bestimmten Integral

Erläuterung am Beispiel:

$$\int_1^3 2x^2 + 1\, dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + x\right) |_1^3$$

Es wird also die Stammfunktion gebildet. Zum Abschluss schreibt man „|" mit den entsprechenden Grenzen.

Im nächsten Schritt werden die Grenzen für x nacheinander eingesetzt. Dabei zieht man die Stammfunktion mit der unteren Grenze von der Stammfunktion mit der oberen Grenze ab:

$$\left(\frac{2}{3}x^3 + x\right) |_1^3 = \left(\frac{2}{3}3^3 + 3\right) - \left(\frac{2}{3}1^3 + 1\right) = 21 - 1\frac{2}{3} = 19\frac{1}{3}$$

Es wird also F(b) – F(a) berechnet.

Tabelle von Stammfunktionen

f(x)	F(x)
0	c
a	ax + c
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
sin(x)	-cos(x) + c
cos(x)	sin(x) + c
$\frac{1}{x}$	ln|x| + c
e^x	e^x
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + c$
ln(x)	x ln(x) – x + c

Rechenregeln

Linearität:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Vorzeichen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Partielle Integration

Die partielle Integration ist nützlich beim Integrieren von Produkten. Sie ist die Umkehrung der Produktregel beim Ableiten.

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) = \big(u(x) \cdot v(x)\big)|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Die Anwendung der partiellen Integration macht also nur Sinn, wenn $\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$ leichter zu berechnen ist als $\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx$

Beispiel:

$$\int_0^1 x \cdot e^x$$

u = x u‘ = 1

v‘ = e^x v = e^x

$\int_0^1 x \cdot e^x = x \cdot e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x = e - e^x|_0^1 = e - (e-1) = 1$

Substitution

Die Substitution kann man benutzen, wenn man die Grundintegrale nicht verwenden kann.

Erklärung am Beispiel:

$$\int_0^a \cos(2x) dx$$

Man führt eine neue Variable ein:

u = 2x

u abgeleitet nach x ergibt:

$$\frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

2x und dx werden ersetzt:

$$\int_0^a \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2a} \cos(u)\, du$$

Dabei werden die Grenzen ebenfalls ersetzt. Dazu setzt man die alten Grenzen in u = 2x für x ein und erhält die neuen Grenzen.

Nun kann man das Integral berechnen:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2a} \cos(u)\, du = \frac{1}{2}\left(\sin(u)\,|_0^{2a}\right) = \frac{1}{2}\sin(2a)$$

Weiteres Beispiel für ein unbestimmtes Integral:

$$\int e^{3x} dx$$

u = 3x

$$\frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}\int e^u\, du = \frac{1}{3}e^u + c$$

Nun wird zurücksubstituiert:

$$\frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$